

Zum Tragverhalten druck- und biegebeanspruchter Holzbauteile

Von der
Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

von
Olaf-Philippe Hörsting
aus Bonn

Eingereicht am 01. Februar 2008

Mündliche Prüfung am 02. April 2008

Berichterstatter Prof. Dr.-Ing. Martin H. Kessel
Prof. Dr.-Ing. [Ulrike](#) Kuhlmann

2008

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde von mir während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baukonstruktion und Holzbau der Technischen Universität Braunschweig angefertigt.

Meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Martin H. Kessel danke ich sehr für das mir entgegen gebrachte Vertrauen und das große wissenschaftliche Interesse an den Ergebnissen meiner Arbeit. Seine jederzeit vorhandene Unterstützung und Diskussionsbereitschaft haben mir sehr geholfen und mich immer wieder motiviert.

Mein Dank gilt ebenfalls der Koreferentin Frau Prof. Dr.-Ing. Ulrike Kuhlmann, dem Vorsitzenden der Prüfungskommission Herrn Prof. Dr.-Ing. Dietmar Hosser und dem Prüfer Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Ummenhofer für ihr Mitwirken in der Prüfungskommission.

Ganz herzlich danke ich allen ehemaligen und aktuellen Mitarbeitern des Instituts für Baukonstruktion und Holzbau für die stetz gute und freundschaftliche Zusammenarbeit. Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Ing. Theo Schönhoff, der mir jederzeit mit Rat und Tat zur Seite stand. Die vielen mit ihm geführten fachlichen Diskussionen haben sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Herrn Dr.-Ing. Thorsten zur Kammer danke ich für seine große Hilfsbereitschaft und seine konstruktive Kritik. Frau Katharina Schaliga danke ich für die Hilfe bei der Anfertigung der in dieser Arbeit vorhandenen Zeichnungen.

Mönchevahlberg, im Mai 2008

Olaf-Philippe Hörsting

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Theoretische Grundlagen des druck- und biegebeanspruchten Stabs | 3 |
| 2.1 | Feldgleichungen des perfekten Stabes | 3 |
| 2.1.1 | Definitionen und Voraussetzungen | 3 |
| 2.1.2 | Bezugssysteme | 3 |
| 2.1.3 | Schnittgrößen | 8 |
| 2.1.4 | Konstitutive Beziehungen | 14 |
| 2.1.5 | Linearisierung der Differentialgleichungen | 18 |
| 2.2 | Das Kippen | 20 |
| 2.2.1 | Lösung des Stabilitätsproblems | 20 |
| 2.2.2 | Einfluss des Wölbwiderstands des Querschnitts | 21 |
| 2.2.3 | Einfluss der Hauptkrümmung | 23 |
| 2.2.4 | Einfluss der Imperfektionen | 26 |
| 2.2.5 | Lösung des Spannungsproblems | 27 |
| 2.2.6 | Ersatzstablängen | 29 |
| 2.3 | Das Biegedrillknicken | 33 |
| 2.3.1 | Lösung des Stabilitätsproblems | 33 |
| 2.3.2 | Lösung des Spannungsproblems | 36 |
| 2.3.3 | Ersatzstablängen | 37 |
| 3 | Der Baustoff Holz | 43 |
| 3.1 | Eigenschaften des Baustoffs Holz | 43 |
| 3.1.1 | Allgemeines | 43 |
| 3.1.2 | Strukturelle Eigenschaften von Bauholz | 44 |
| 3.1.2.1 | Die ideale Bauholzstruktur | 44 |
| 3.1.2.2 | Abweichungen von der idealen Struktur | 45 |
| 3.1.2.3 | Die tatsächliche Struktur von Bauholz | 45 |
| 3.1.3 | Holzfeuchte | 46 |
| 3.2 | Baustoff Holz im mechanischen Modell | 47 |
| 3.2.1 | Das allgemeine Last-Verformungs-Verhalten von Holz | 47 |
| 3.2.1.1 | Das Last-Verformungs-Verhalten parallel zur Faser | 47 |
| 3.2.1.2 | Das Last-Verformungs-Verhalten senkrecht zur Faser | 49 |
| 3.2.1.3 | Das Last-Verformungs-Verhalten bei Schubbeanspruchung | 50 |
| 3.2.2 | Festigkeits- und Steifigkeitseigenschaften von Bauholz | 51 |
| 3.2.2.1 | Wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden und Bemessung | 51 |
| 3.2.2.2 | Druck- und Zugfestigkeit von Bauholz | 53 |
| 3.2.2.3 | Biegefestigkeit von Bauholz | 54 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.2.2.4 | Schubfestigkeit von Bauholz | 56 |
| 3.2.2.5 | Elastizität von Bauholz | 57 |
| 3.2.3 | Materialverhalten unter Langzeitbeanspruchung | 60 |
| 4 | Tragfähigkeit von Holzquerschnitten | 61 |
| 4.1 | Analytische Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit von rechteckigen Holzstäben..... | 61 |
| 4.1.1 | Allgemeines | 61 |
| 4.1.2 | Definition der Vorzeichen..... | 61 |
| 4.1.3 | Querschnittstragfähigkeit im ebenen Modell | 62 |
| 4.1.3.1 | Einfluss des Plastizierens | 62 |
| 4.1.3.2 | Einfluss des Volumeneffekts | 66 |
| 4.1.4 | Querschnittstragfähigkeit im räumlichen Modell..... | 73 |
| 4.1.4.1 | Einfluss des Plastizierens | 73 |
| 4.1.4.2 | Einfluss des Volumeneffekts | 78 |
| 4.2 | Darstellung der normierten Querschnittstragfähigkeit von Bauholz | 80 |
| 4.2.1 | Darstellung der Querschnittstragfähigkeit von Bauholz der Festigkeitsklasse C24 | 80 |
| 4.2.2 | Darstellung der Querschnittstragfähigkeit von Bauholz der Festigkeitsklasse Gl 24h | 83 |
| 4.3 | Weitere Untersuchungen zur Querschnittstragfähigkeit von Bauholz | 84 |
| 4.3.1 | Untersuchung des Einflusses veränderter Arbeitslinien auf die Querschnittstragfähigkeit..... | 84 |
| 4.3.2 | Untersuchung der Dehnungsbegrenzung im Druckbereich | 85 |
| 4.3.3 | Untersuchung des Einflusses des Volumeneffekts auf die Querschnittstragfähigkeit..... | 85 |
| 4.3.3.1 | Einfluss des Volumeneffekts auf die M-N-Interaktion | 86 |
| 4.3.3.2 | Einfluss des Volumeneffekts auf die M_y - M_z -Interaktion .. | 87 |
| 4.3.3.3 | Untersuchung des sogenannten Höheneffekts | 94 |
| 5 | Tragfähigkeit von Holzbauteilen | 97 |
| 5.1 | Allgemeines | 97 |
| 5.2 | Modellbildung..... | 98 |
| 5.2.1 | Festigkeits- und Steifigkeitsannahmen | 98 |
| 5.2.2 | Das FE-Modell | 99 |
| 5.2.3 | Imperfektionen | 100 |
| 5.3 | Tragfähigkeit von druckbeanspruchten Holzbauteilen | 101 |
| 5.3.1 | Allgemeines | 101 |
| 5.3.2 | Analytische Ermittlung der Traglast | 102 |
| 5.3.3 | Traglast nach dem k_c -Verfahren | 103 |
| 5.3.4 | Druckstäbe aus Brettschichtholz | 104 |
| 5.3.5 | Druckstäbe aus Vollholz | 105 |
| 5.3.6 | Einfluss der Imperfektion 'exzentrische Lasteinleitung' | 107 |
| 5.3.7 | Verformungen | 110 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.3.8 | Erkenntnisse der Untersuchung | 111 |
| 5.4 | Tragfähigkeit von biegebeanspruchten Holzbauteilen | 112 |
| 5.4.1 | Allgemeines | 112 |
| 5.4.2 | Analytische Ermittlung der Traglast | 113 |
| 5.4.3 | Traglast nach dem k_m -Verfahren | 114 |
| 5.4.4 | Schubversagen bei kippgefährdeten Biegestäben | 115 |
| 5.4.5 | Kippgefährdete Biegestäbe aus Brettschichtholz | 117 |
| 5.4.6 | Einfluss der Imperfektion Vorverdrehung..... | 123 |
| 5.4.7 | Erkenntnisse der Untersuchung | 124 |
| 5.5 | Tragfähigkeit von druck- und biegebeanspruchten Holzbauteilen..... | 126 |
| 5.5.1 | Allgemeines | 126 |
| 5.5.2 | Analytische Berechnung der Traglast | 127 |
| 5.5.3 | Traglast nach dem kombinierten k_c - k_m -Verfahren | 129 |
| 5.5.4 | Schubversagen bei biegedrillknickgefährdeten Stäben..... | 129 |
| 5.5.5 | Biegedrillknickgefährdete Stäbe aus Brettschichtholz | 131 |
| 5.5.6 | Einfluss der Imperfektionen exzentrische Lasteinleitung und Vor- verdrehung..... | 136 |
| 5.5.7 | Erkenntnisse der Untersuchung | 139 |
| 6 | Anwendung von Ersatzstablängen bei Holzbauteilen mit Querlasten | 141 |
| 6.1 | Allgemeines | 141 |
| 6.2 | Ersatzstablängen von biegebeanspruchten Holzbauteilen..... | 141 |
| 6.3 | Ersatzstablängen von druck- und biegebeanspruchten Holzbauteilen | 147 |
| 6.4 | Erkenntnisse der Untersuchung | 151 |
| 7 | Bemessungskonzept für druck- und biegebeanspruchte Holzbauteile | 153 |
| 7.1 | Allgemeines | 153 |
| 7.2 | Imperfektionsannahmen | 153 |
| 7.3 | Bemessung von druckbeanspruchten Bauteilen | 154 |
| 7.4 | Bemessung von biegebeanspruchten Bauteilen | 155 |
| 7.4.1 | Nachweis der Längsspannungen | 155 |
| 7.4.2 | Nachweis der Schubspannungen | 156 |
| 7.5 | Bemessung von druck- und biegebeanspruchten Bauteilen..... | 157 |
| 7.5.1 | Nachweis der Längsspannungen | 157 |
| 7.5.2 | Nachweis der Schubspannungen | 158 |
| 7.6 | Beanspruchung durch Streckenlasten | 159 |
| 7.6.1 | Nachweis der Längsspannungen | 159 |
| 7.6.2 | Nachweis der Schubspannungen | 159 |
| 7.7 | Übersicht | 160 |
| 8 | Zusammenfassung | 163 |
| | Literatur | 165 |
| | Anhang | 171 |

| | | |
|----------|--|------------|
| A | Anhang | 171 |
| A.1 | Herleitung des Verdrehungs- und des Krümmungvektors nach Roik [60] ... | 171 |
| A.2 | Untersuchung des Bemessungsvorschlags von Brüninghoff und Klapp | 174 |
| A.3 | Weitere Diagramme | 176 |
| A.4 | Lösungen des Stabilitätsproblems einiger Modelle nach Pflüger [56] | 178 |

1 Einleitung

Das Tragverhalten von Bauteilen, die infolge einer äußeren Einwirkung durch Druck, Biegung oder einer Kombination von Druck und Biegung beansprucht werden, zeichnet sich dadurch aus, dass infolge einer Steigerung der Einwirkung die Materialbeanspruchungen und Verformungen selbst bei linear elastischem Materialverhalten überproportional (nichtlinear) anwachsen können. Das Phänomen dieses geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens wird im Holzbau bei Druckstäben als Knicken, bei Biegestäben als Kippen und bei Stäben mit kombinierter Beanspruchung als Biegedrillknicken bezeichnet.

Für den Holzbau werden für das Knicken und Kippen in DIN 1052:2004-08 und in EN 1995:2005-12 vereinfachte Bemessungsverfahren (Ersatzstabverfahren) angegeben. Für das Biegedrillknicken ist ein solches Verfahren nicht vorhanden. Stattdessen wird ein Nachweis vorgeschlagen, bei dem die Verfahren für das Knicken und das Kippen linear superponiert werden. Unabhängig davon, ob eine theoretische Begründung für dieses Vorgehen fehlt, ergeben sich Zweifel an der Zulässigkeit der Superposition der vereinfachten Verfahren für das Knicken und das Kippen schon daraus, dass beim vereinfachten Verfahren für das Knicken das physikalisch nichtlineare Materialverhalten von Holz berücksichtigt wird, dem vereinfachten Verfahren für das Kippen jedoch ein linearer Ansatz zugrunde liegt. Während das vereinfachte Verfahren für das Knicken auf der Grundlage eines mechanischen Modells, das unter anderem das Plastizieren des Materials bei Druckbeanspruchung berücksichtigt, wurde das vereinfachte Verfahren für das Kippen für ein ideal-elastisches Material entwickelt.

Ziel dieser Arbeit ist zunächst zu überprüfen, ob das vereinfachte Verfahren für das Kippen und dessen Superposition mit dem vereinfachten Verfahren für das Knicken für die Bemessung von biegedrillknickgefährdeten Bauteilen zu wirtschaftlichen und auf der sicheren Seite liegenden Ergebnissen führt. Ausserdem soll gegebenenfalls ein Bemessungskonzept entwickelt werden, mit dem knick-, kipp- und biegedrillknickgefährdete Holzbauteile gleichermaßen gut bemessen werden können. Das Bemessungskonzept soll einerseits das physikalisch nichtlineare Materialverhalten von Holz in guter Näherung berücksichtigen und andererseits das geometrisch nichtlineare Tragverhalten in sinnvoller Vereinfachung beinhalten. Gleichzeitig soll die Bemessung nach dem zu entwickelnden Konzept aber auch nicht aufwendiger oder komplizierter zu handhaben sein, als die vorhandenen Bemessungsverfahren.

2 Theoretische Grundlagen des druck- und biegebeanspruchten Stabs

2.1 Feldgleichungen des perfekten Stabes

2.1.1 Definitionen und Voraussetzungen

Die Problematik des biegedrillknickgefährdeten Biegestabs wird zunächst für den allgemeinen Fall hergeleitet. Dabei gelten die im Folgenden angegebenen vereinfachenden Annahmen:

- Der Biegestab besteht aus einem Material, das isotrop, homogen und ideal-elastisch ist.
- Der Stabquerschnitt ist rechteckig und über die Trägerlänge konstant.
- Die Verformungen des Stabes werden als klein angenommen.
- Die Querschnittsform bleibt auch bei Verformung erhalten.
- Die Längenänderungen aus Normalkraft sind im Vergleich zu den Biegeverformungen als klein anzunehmen.
- Die auf den Stab einwirkenden Lasten sind richtungstreu.

Die Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben des Querschnitts wird teilweise als Annahme vorausgesetzt. Teilweise wird aber auch das Verwölben bzw. der Wölbwiderstand des Querschnitts berücksichtigt. Es ist jeweils angegeben, welche Annahme im Einzelnen getroffen wird.

Im Rahmen dieser Arbeit werden vor allem Biegestäbe aus Holz untersucht. Der Werkstoff Holz genügt nicht allen hier getroffenen Annahmen. Die Abweichungen werden in den folgenden Kapiteln näher untersucht. In diesem Kapitel geht es zunächst darum, das Tragverhalten biegedrillknickgefährdeter Biegestäbe darzustellen und die Auswirkungen der verschiedenen Einflussgrößen auf das Tragverhalten aufzuzeigen.

2.1.2 Bezugssysteme

Für die Darstellung der Beanspruchungen und Verformungen von Biegestäben wird ein kartesisches Koordinatensystem mit den Koordinaten x , y und z definiert. Diese werden globale Koordinaten genannt. Im unverformten Zustand stimmt die Stablängsachse genau mit der x -Achse überein. Die y - und die z -Achse liegen auf den beiden Hauptachsen des Stabquerschnitts. Dabei liegt die y -Achse stets horizontal in Richtung der kleineren

Ausdehnung, der Breite, und die z -Achse stets vertikal in Richtung der grösseren Ausdehnung, der Höhe.

Zusätzlich wird ein lokales, ebenfalls kartesisches Koordinatensystem mit den Koordinaten ξ , η und ζ definiert. Der Ursprung des lokalen Systems liegt im Schwerpunkt des gerade betrachteten Querschnitts des verformten Biegestabs. Dabei liegt die ξ -Achse tangential an der Biegelinie des Stabs und die η - und ζ -Achsen liegen auf den Hauptachsen des verdrehten Querschnitts. Dabei liegt die η -Achse analog zur y -Achse stets auf der schwachen Hauptachse und die ζ -Achse analog zur z -Achse stets auf der starken Hauptachse.

Bei der Berechnung der Schnittgrößen von Bauteilen, deren Stabilität gefährdet ist, müssen die Verformungen zwingend berücksichtigt werden. Die Verformungen eines Biegestabs, die einen Einfluss auf das Tragverhalten ausüben, werden ausreichend beschrieben durch die Verschiebungen und Verdrehungen des ebenbleibenden Querschnitts. Da die Längsverschiebungen (in x -Richtung) nach Definition vernachlässigt werden, bleiben als Einflussgrößen die Verschiebungen v in y -Richtung und w in z -Richtung sowie die Verdrehungen φ_x (Verdrehung um die x -Achse), φ_y und φ_z . In Bild 2.1 ist ein verformter Biegestab beispielhaft dargestellt.

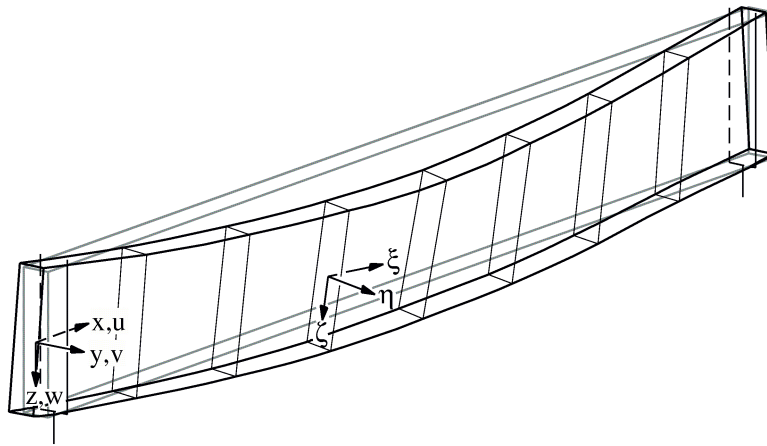


Bild 2.1: Verformter gabelgelagerter Biegestab

Die Beanspruchungen eines Stabes werden in der Regel für das unverformte Modell im globalen Koordinatensystem formuliert. Daher müssen Transformationsgleichungen aufgestellt werden, die die Beanspruchungen aus dem globalen System ins lokale überführen.

Für die Transformation der Koordinaten vom globalen ins lokale System in einer Ebene gilt

$$\vec{r}_{\xi, \eta} = T_{eben} \cdot \vec{r}_{x, y} \quad (2.1)$$

mit der ebenen Transformationsmatrix

$$T_{\text{eben}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Die Definitionen der Achsen x , y und z und ξ , η und ζ sowie der Verdrehungen φ_x , φ_y und φ_z sind in den Bildern Bild 2.2, Bild 2.3 und Bild 2.4 veranschaulicht.

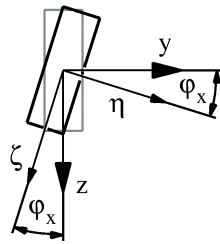


Bild 2.2: Verformter Biegestab, Verdrehung um die x-Achse

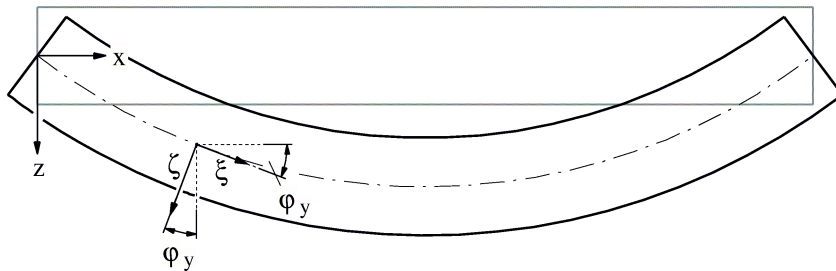


Bild 2.3: Verformter Biegestab, Verdrehung um die y-Achse

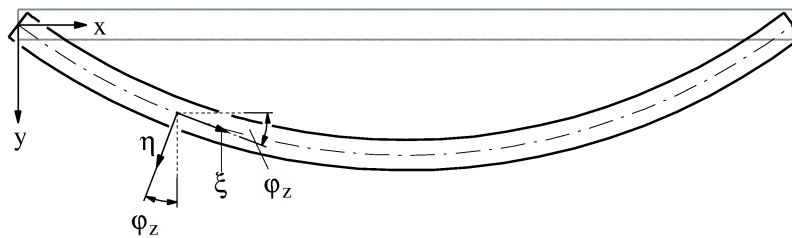


Bild 2.4: Verformter Biegestab, Verdrehung um die z-Achse

Durch Multiplikation der räumlichen Matrizen

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & \sin \varphi_x \\ 0 & -\sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

für die Verdrehung φ_x um die x-Achse,

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

für die Verdrehung φ_y um die y-Achse und

$$T_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_z & \sin \varphi_z & 0 \\ -\sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

für die Verdrehung φ_z um die z-Achse wird die räumliche Transformationsmatrix

$$T = T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_z \cdot \cos \varphi_y & \sin \varphi_z \cdot \cos \varphi_x & \sin \varphi_z \cdot \sin \varphi_x \\ -\sin \varphi_z \cdot \cos \varphi_y & \cos \varphi_z \cdot \cos \varphi_x & \cos \varphi_z \cdot \sin \varphi_x \\ -\sin \varphi_y & -\sin \varphi_x \cdot \cos \varphi_y & \cos \varphi_y \cdot \cos \varphi_x \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

wie auch bei Roik [60] gebildet.

Da im Bauwesen große Verformungen die Gebrauchstauglichkeit beeinträchtigen und von daher nur kleine Verdrehungen zulässig sind, kann auch bei der Berechnung vereinfachend angenommen werden, dass die Verdrehungen klein sind. Es muss selbstverständlich sichergestellt werden, dass die Verdrehungen auch tatsächlich klein bleiben. Für die Berechnung werden zunächst der Kosinus und der Sinus jeder Verdrehung φ als Potenzreihen der Form

$$\sin \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \varphi^{2k+1} = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \pm \dots \quad (2.7)$$

bzw.

$$\cos \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \varphi^{2k} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} \pm \dots \quad (2.8)$$

dargestellt. Unter der Annahme kleiner Verdrehungen werden alle Produkte von Verdrehungen dritten Grades als vernachlässigbar klein angesehen und gestrichen. Meist werden

auch bereits die Produkte von Verdrehungen zweiten Grades vernachlässigt. Für den Sinus einer Verdrrehung φ ergibt sich daraus die Vereinfachung

$$\sin \varphi = \varphi \quad (2.9)$$

und für den Kosinus, je nachdem, ob erst Produkte dritter Ordnung vernachlässigt werden, die Vereinfachung

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad (2.10)$$

oder schon Produkte zweiter Ordnung gestrichen werden, die Vereinfachung

$$\cos \varphi = 1. \quad (2.11)$$

Werden auch die Verschiebungen als klein angesehen, so dass Produkte von Verschiebungen und Verdrehungen dritter bzw. zweiter Ordnung gestrichen werden können, vereinfacht sich die Transformationsmatrix aus Gl. (2.6), die die Koordinaten vom globalen ins lokale System überführt, zu

$$T_{qua} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varphi_y^2}{2} - \frac{\varphi_z^2}{2} & \varphi_z - \varphi_y \varphi_x & \varphi_z \varphi_x + \varphi_y \\ -\varphi_z & 1 - \frac{\varphi_x^2}{2} - \frac{\varphi_z^2}{2} & \varphi_x - \varphi_y \varphi_z \\ -\varphi_y & -\varphi_x & 1 - \frac{\varphi_x^2}{2} - \frac{\varphi_y^2}{2} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

bei Vernachlässigung von Produkten dritter Ordnung und zu

$$T_{lin} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_z & \varphi_y \\ -\varphi_z & 1 & \varphi_x \\ -\varphi_y & -\varphi_x & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

bei Vernachlässigung von Produkten zweiter Ordnung. Die Inverse der Transformationsmatrix T_{qua}

$$T_{qua}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varphi_y^2}{2} - \frac{\varphi_z^2}{2} & -\varphi_z & -\varphi_y \\ \varphi_z - \varphi_y \varphi_x & 1 - \frac{\varphi_x^2}{2} - \frac{\varphi_z^2}{2} & -\varphi_x \\ \varphi_z \varphi_x + \varphi_y & \varphi_x - \varphi_y \varphi_z & 1 - \frac{\varphi_x^2}{2} - \frac{\varphi_y^2}{2} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

bzw. der Transformationsmatrix T_{lin}

$$T_{lin}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi_z & -\varphi_y \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x \\ \varphi_y & \varphi_x & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

transformiert die Koordinaten durch

$$\vec{r}_{x,y,z} = T^{-1} \cdot \vec{r}_{\xi,\eta,\zeta} \quad (2.16)$$

vom lokalen ins globale Koordinaten-System.

2.1.3 Schnittgrößen

Der Biegestab kann durch Kräfte und Momente beansprucht werden. Diese Beanspruchungen können als Einzellasten an einer oder mehreren diskreten Stellen des Stabs oder als Streckenlast gleichförmig oder ungleichförmig über eine Strecke verteilt angreifen. Einzellasten und Unstetigkeitsstellen im Verlauf von Streckenlasten erzeugen Unstetigkeitsstellen im Verlauf der Zustandsgrößen wie Schnittgrößen und Verformungen. Eine stetige Formulierung der Zustandsgrößen ist also nur bereichsweise zwischen Unstetigkeitsstellen der Beanspruchung möglich.

Für ein differentielles Stabelement der Länge dx können die Beanspruchungen in über die Länge dx konstante Streckenlasten und an den Rändern des Elements angreifende Einzellasten, genannt Schnittgrößen, zerlegt werden. Die Resultierenden der Streckenlasten greifen näherungsweise in der Mitte des differentiellen Elements an. Während die Lasten q_x und m_x im Allgemeinen zusätzlich auch genau in der Stabachse wirken, haben die Lasten q_y und q_z aufgrund der Notwendigkeit der Lasteinleitung gewöhnlich einen Abstand y_{qy} bzw. z_{qz} von der Stabachse. Dabei wird hier vereinfachend angenommen, dass die Lasteinleitungspunkte zwar in Lastrichtung von der Stabachse abweichen, senkrecht dazu aber nicht. In Bild 2.5 ist ein derart beanspruchtes differentielles Stabelement dargestellt.

Die in Bild 2.5 dargestellten Schnittgrößen greifen in der Achse des verformten Stabs an und sind auf das lokale Koordinaten-System bezogen. Um Kräfte- und Momentengleichgewicht bilden zu können, müssen die Schnittgrößen ins globale System durch

$$\begin{pmatrix} N_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} N_\xi \\ Q_\eta \\ Q_\zeta \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

und

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

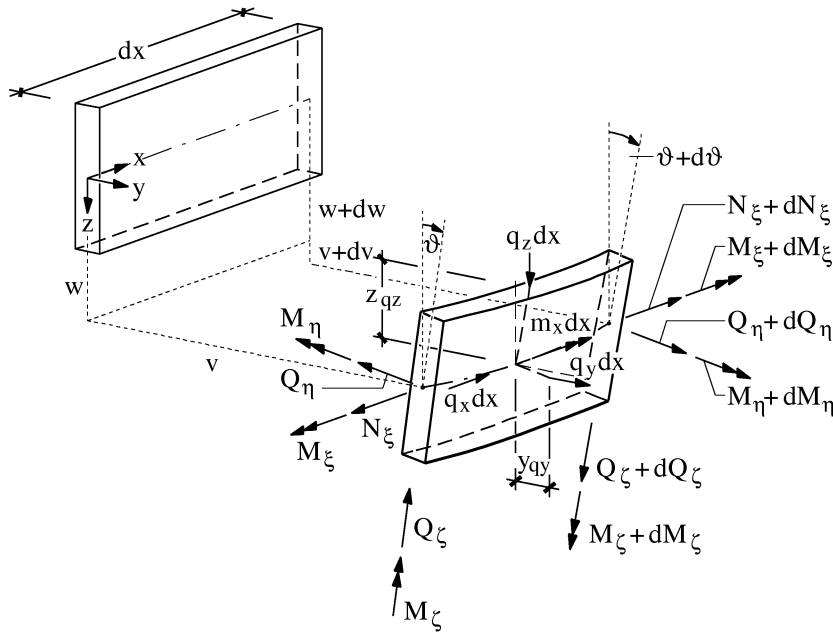


Bild 2.5: Verformtes differentielles Stabelement

transformiert werden. Die Transformationsmatrix T^{-1} (bzw. T) ist am positiven und am negativen Schnittufer des differentiellen Elements nicht gleich, da die Verformungen und deshalb auch die Verdrehungen φ_x , φ_y und φ_z differentielle Zuwächse erfahren. Der Vektor der Verdrehwinkel am negativen Schnittufer kann durch

$$\begin{pmatrix} \varphi_{x,n} \\ \varphi_{y,n} \\ \varphi_{z,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \frac{dw}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ w' \\ v' \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

und am positiven Schnittufer durch

$$\begin{pmatrix} \varphi_{x,p} \\ \varphi_{y,p} \\ \varphi_{z,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta + d\vartheta \\ \frac{dw}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} dx \\ \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta + \vartheta' dx \\ w' + w'' dx \\ v' + v'' dx \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

dargestellt werden. Je nachdem, ob nun Produkte von Verschiebungs- und Verdrehungsgrößen, im Weiteren einfach Verformungsgrößen genannt, ab zweiter oder dritter Ordnung vernachlässigt werden, ergeben sich unterschiedliche Kraftgrößen- und Momentenvektoren. Der Übersichtlichkeit wegen wäre es angebracht an dieser Stelle bereits Produkte von Verformungsgrößen zweiter Ordnung zu vernachlässigen, wie das auch im Allgemeinen in der Fachliteratur erfolgt, z.B. bei Zurborg [71]. Um den Einfluss der Terme, die

diese Produkte enthalten, einmal genauer zu betrachten, wird hier die unübersichtlichere Form der Darstellung, d.h. jene unter Berücksichtigung der Terme zweiter Ordnung, gewählt.

Werden nun die lokalen Schnittgrößen mit Hilfe der Transformationmatrix T_{qua}^{-1} in globale Schnittgrößen transformiert, ergeben sich die Kraftgrößenvektoren

$$\begin{pmatrix} N_{x,n} \\ Q_{y,n} \\ Q_{z,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{w'^2 + v'^2}{2} & -v' & -w' \\ v' - w'\vartheta & 1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} & -\vartheta \\ w' + v'\vartheta & \vartheta - w'v' & 1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_\xi \\ Q_\eta \\ Q_\zeta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_\xi \left(1 - \frac{w'^2 + v'^2}{2}\right) - Q_\eta v' - Q_\zeta w' \\ N_\xi (v' - w'\vartheta) + Q_\eta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2}\right) - Q_\zeta \vartheta \\ N_\xi (w' + v'\vartheta) + Q_\eta (\vartheta - w'v') + Q_\zeta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

für das negative Schnittufer und

$$\begin{pmatrix} N_{x,p} \\ Q_{y,p} \\ Q_{z,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_\xi \left(1 - \frac{w'^2 + v'^2}{2} - w'w''dx - v'v''dx\right) + \\ + N'_\xi dx \left(1 - \frac{w'^2 + v'^2}{2} - w'w''dx - v'v''dx\right) - \\ - Q_\eta v' - Q_\eta v''dx - Q'_\eta v'dx - Q'_\eta v''dx^2 - \\ - Q_\zeta w' - Q_\zeta w''dx - Q'_\zeta w'dx - Q'_\zeta w''dx^2 \\ \\ N_\xi (v' + v''dx - w'\vartheta - w'\vartheta'dx - w''\vartheta dx^2) + \\ + N'_\xi dx (v' + v''dx - w'\vartheta - w'\vartheta'dx - w''\vartheta dx^2) + \\ + Q_\eta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} - \vartheta\vartheta'dx - v'v''dx\right) + \\ + Q'_\eta dx \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} - \vartheta\vartheta'dx - v'v''dx\right) - \\ - Q_\zeta \vartheta - Q_\zeta \vartheta'dx - Q'_\zeta \vartheta dx - Q'_\zeta \vartheta'dx^2 \\ \\ N_\xi (w' + w''dx + v'\vartheta + v'\vartheta'dx + v''\vartheta dx^2) + \\ + N'_\xi (w' + w''dx + v'\vartheta + v'\vartheta'dx + v''\vartheta dx^2) - \\ + Q_\eta (\vartheta + \vartheta'dx - v'w' - w'v''dx - v'w''dx) + \\ + Q'_\eta dx (\vartheta + \vartheta'dx - v'w' - w'v''dx - v'w''dx) + \\ + Q_\zeta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} - \vartheta\vartheta'dx - w'w''dx\right) + \\ + Q'_\zeta dx \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} - \vartheta\vartheta'dx - w'w''dx\right) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

für das positive Schnittufer sowie die Momentenvektoren

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} M_{x,n} \\ M_{y,n} \\ M_{z,n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{w'^2 + v'^2}{2} & -v' & -w' \\ v' - w'\vartheta & 1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} & -\vartheta \\ w' + v'\vartheta & \vartheta - w'v' & 1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} M_\xi \left(1 - \frac{w'^2 + v'^2}{2}\right) - M_\eta v' - M_\zeta w' \\ M_\xi (v' - w'\vartheta) + M_\eta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2}\right) - M_\zeta \vartheta \\ M_\xi (w' + v'\vartheta) + M_\eta (\vartheta - w'v') + M_\zeta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.23)
\end{aligned}$$

für das negative Schnittufer und

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} M_{x,p} \\ M_{y,p} \\ M_{z,p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M_\xi \left(1 - \frac{w'^2 + v'^2}{2} - w'w''dx - v'v''dx\right) + \\ + M'_\xi dx \left(1 - \frac{w'^2 + v'^2}{2} - w'w''dx - v'v''dx\right) - \\ - M_\eta v' - M_\eta v''dx - M'_\eta v'dx - M'_\eta v''dx^2 \\ - M_\zeta w' - M_\zeta w''dx - M'_\zeta w'dx - M'_\zeta w''dx^2 \\ \\ M_\xi (v' + v''dx - w'\vartheta - w'\vartheta'dx - w''\vartheta dx^2) + \\ M'_\xi dx (v' + v''dx - w'\vartheta - w'\vartheta'dx - w''\vartheta dx^2) + \\ + M_\eta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} - \vartheta\vartheta'dx - v'v''dx\right) + \\ + M'_\eta dx \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} - \vartheta\vartheta'dx - v'v''dx\right) - \\ - M_\zeta \vartheta - M_\zeta \vartheta'dx - M'_\zeta \vartheta dx - M'_\zeta \vartheta'dx^2 \\ \\ M_\xi (w' + w''dx + v'\vartheta + v'\vartheta'dx + v''\vartheta dx^2) + \\ + M'_\xi (w' + w''dx + v'\vartheta + v'\vartheta'dx + v''\vartheta dx^2) - \\ + M_\eta (\vartheta + \vartheta'dx - v'w' - w'v''dx - v'w''dx) + \\ + M'_\eta dx (\vartheta + \vartheta'dx - v'w' - w'v''dx - v'w''dx) + \\ + M_\zeta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} - \vartheta\vartheta'dx - w'w''dx\right) + \\ + M'_\zeta dx \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} - \vartheta\vartheta'dx - w'w''dx\right) \end{pmatrix} \quad (2.24)
\end{aligned}$$

für das positive Schnittufer.

Mit den am verformten Element angreifenden, auf das globale Koordinaten-System transformierten Schnittgrößen können nun die Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden. Das Kräftegleichgewicht

$$\sum \vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} N_{x,n} \\ Q_{y,n} \\ Q_{z,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{x,p} \\ Q_{y,p} \\ Q_{z,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_x dx \\ q_y dx \\ q_z dx \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

führt mit Gl. (2.21) und Gl. (2.22) durch infinitesimalen Grenzübergang, d.h. zunächst Kürzen des in jedem Term vorhandenen Multiplikators dx , dann Grenzübergang $\lim_{dx \rightarrow 0}$, und Zusammenfassung von Termen zu den Gleichungen

$$N'_\xi - \left(N \frac{w'^2 + v'^2}{2} \right)' - (Q_\eta v')' - (Q_\zeta w')' + q_x = 0 \quad (2.26)$$

$$(N_\xi (v' - w' \vartheta))' + Q'_\eta - \left(Q_\eta \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} \right)' - (Q_\zeta \vartheta)' + q_y = 0 \quad (2.27)$$

$$(N_\xi (w' + v' \vartheta))' + (Q_\eta (\vartheta - w' v'))' + Q'_\zeta - \left(Q_\zeta \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} \right)' + q_z = 0 \quad (2.28)$$

mit deren Hilfe die Kraftgrößen

$$N_\xi = - \left(1 - \frac{w'^2 + v'^2}{2} \right) \int q_x dx - (v' - \vartheta w') \int q_y dx - (w' + \vartheta v') \int q_z dx \quad (2.29)$$

$$Q_\eta = v' \int q_x dx - \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} \right) \int q_y dx - (\vartheta - w' v') \int q_z dx \quad (2.30)$$

$$Q_\zeta = w' \int q_x dx + \vartheta \int q_y dx - \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} \right) \int q_z dx \quad (2.31)$$

ermittelt werden können.

Bei der Formulierung des Momentengleichgewichts am negativen Schnittufer des differentiellen Elements müssen neben den Verschiebungen und Verdrehungen des Elementmittelpunkts sowie des positiven Schnittufers auch noch die Verschiebungen der Lastangriffspunkte der vertikalen und horizontalen Lasten q_y und q_z berücksichtigt werden. Das Momentengleichgewicht am negativen Schnittufer des differentiellen Elements wird durch

$$\sum \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} M_{x,n} \\ M_{y,n} \\ M_{z,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{x,p} \\ M_{y,p} \\ M_{z,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_x dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \quad (2.32)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -z_m & y_m \\ z_m & 0 & -x_m \\ -y_m & x_m & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_x dx \\ q_y dx \\ q_z dx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -z_p & y_p \\ z_p & 0 & -x_p \\ -y_p & x_p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_{x,p} \\ Q_{y,p} \\ Q_{z,p} \end{pmatrix}$$

mit Gl. (2.21) und Gl. (2.22) und dem Verformungsvektor für die Lastangriffspunkte des Elementmittelpunktes

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} dx \\ \frac{1}{2} (v' dx + v'' dx^2) + z_{qz} (\vartheta + \frac{1}{2} \vartheta' dx) \\ \frac{1}{2} (w' dx + w'' dx^2) + y_{qy} (\vartheta + \frac{1}{2} \vartheta' dx) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

sowie des positiven Schnittufers

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ v' dx + v'' dx^2 \\ w' dx + w'' dx^2 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

beschrieben. Nach infinitesimalem Grenzübergang der Größe dx folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} & \left(M_\xi \left(1 - \frac{w'^2 + v'^2}{2} \right) \right)' - (M_\eta v')' - (M_\zeta w')' - \\ & - Q_\eta (w' - \vartheta v') + Q_\zeta (v' + \vartheta w') + q_z z_{qz} \vartheta - q_y y_{qy} \vartheta + m_x = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} & (M_\xi (v' - w' \vartheta))' + \left(M_\eta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} \right) \right)' - (M_\zeta \vartheta)' - \\ & - N_\xi \vartheta v' - Q_\eta \vartheta - Q_\zeta \left(1 - \frac{\vartheta^2 - w'^2}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} & (M_\xi (w' + v' \vartheta))' + (M_\eta (\vartheta - w' v'))' + \left(M_\zeta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} \right) \right)' - \\ & - N_\xi \vartheta w' + Q_\eta \left(1 - \frac{\vartheta^2 - v'^2}{2} \right) - Q_\zeta (\vartheta - v' w') = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nach Auflösung der Gl. (2.36) nach Q_ζ und anschließender Multiplikation mit v' sowie der Gl. (2.37) nach Q_η und anschließender Multiplikation mit w' können die Gleichungen

$$Q_\zeta v' = (M_\xi v')' v' + M_\eta' v' - (M_\zeta \vartheta)' v' - Q_\eta \vartheta v' \quad (2.38)$$

$$- Q_\eta w' = (M_\xi w')' w' + (M_\eta \vartheta)' w' + M_\zeta' w' - Q_\zeta \vartheta w' \quad (2.39)$$

in Gl. (2.35) eingesetzt werden, so dass die Kraftgrößen aus dieser Gleichung eliminiert werden können. Die Gl. (2.27) und Gl. (2.28) können zu

$$- (N_\xi w' \vartheta)' + \left(Q_\eta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} \right) \right)' - (Q_\zeta \vartheta)' = - (N_\xi v')' - q_y \quad (2.40)$$

$$(N_\xi v' \vartheta)' + (Q_\eta \vartheta)' + \left(Q_\zeta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} \right) \right)' = - (N_\xi w')' + (Q_\eta w' v')' - q_z \quad (2.41)$$

umgeformt und in die nach x diffenzierten Gl. (2.36) und Gl. (2.37)

$$\begin{aligned}
& (M_\xi (v' - w' \vartheta))'' + \left(M_\eta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} \right) \right)'' - (M_\zeta \vartheta)'' - (Q_\zeta w'^2)' - \\
& - (N_\xi \vartheta v')' - (Q_\eta \vartheta)' - \left(Q_\zeta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} \right) \right)' = 0
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
& (M_\xi (w' + v' \vartheta))'' + (M_\eta (\vartheta - w' v'))'' + \left(M_\zeta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} \right) \right)'' + (Q_\eta v'^2)' + \\
& + (Q_\zeta v' w')' - (N_\xi \vartheta w')' + \left(Q_\eta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} \right) \right)' - (Q_\zeta \vartheta)' = 0.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

eingesetzt werden, so dass Gl. (2.35) bis Gl. (2.37) in der Form

$$\begin{aligned}
& M'_\xi \left(1 + \frac{w'^2 + v'^2}{2} \right) - M_\eta (v'' - \vartheta w'') + (M_\eta \vartheta w')' - \\
& - M_\zeta (w'' + \vartheta v'') - (M_\zeta \vartheta v')' + q_z z_{qz} \vartheta - q_y y_{qy} \vartheta + m_x = 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
& (M_\xi (v' - w' \vartheta))'' + \left(M_\eta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + v'^2}{2} \right) \right)'' - (M_\zeta \vartheta)'' + \\
& + (N_\xi w')' - (Q_\eta v' w')' - (Q_\zeta w'^2)' + q_z = 0
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
& (M_\xi (w' + v' \vartheta))'' + (M_\eta (\vartheta - v' w'))'' + \left(M_\zeta \left(1 - \frac{\vartheta^2 + w'^2}{2} \right) \right)'' - \\
& - (N_\xi v')' + (Q_\eta v'^2)' + (Q_\zeta v' w')' - q_y = 0.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

dargestellt werden können.

2.1.4 Konstitutive Beziehungen

Konstitutive (wesentliche) Beziehungen beschreiben den Zusammenhang von Schnittgrößen bzw. Spannungen, Materialkenngrößen, Geometrie des Querschnitts und Verformungen des Bauteils. Hergeleitet werden die konstitutiven Beziehungen aus den Materialgesetzen (z.B. Hook'sches Gesetz), der Verformungsgeometrie (Kinematik) sowie den Gleichgewichts- und Randbedingungen eines Bauteils.

Hofmann [35] leitet eine verallgemeinerte Formulierung für Längskraft, zweiachsige Biegung und Torsion her. Unter Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung aus Torsion und Querkraft sowie unter Annahme kleiner Verdrehung ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen

$$-(EAu')' - q_x = 0 \quad (2.47)$$

$$(EI_{\omega_z} v_s'')'' - (GA_{S_z} v_s')' - q_y = 0 \quad (2.48)$$

$$-(EI_z v_b'')' + (EI_{\omega_z} v_s'')' - (GA_{S_z} v_s') - m_z = 0 \quad (2.49)$$

$$(EI_{\omega_y} w_s'')'' - (GA_{S_y} w_s')' - q_z = 0 \quad (2.50)$$

$$(EI_y w_b'')' - (EI_{\omega_y} w_s'')' + (GA_{S_y} w_s') - m_y = 0 \quad (2.51)$$

$$(EI_{\omega_x} \vartheta'')'' - (GI_x \vartheta')' - m_x = 0. \quad (2.52)$$

Dabei sind E und G die Materialkennwerte E-Modul (parallel zur Stabachse) und Gleitmodul, I_y und I_z die Biegeträgheitsmomente, I_x das Torsionsträgheitsmoment, I_{ω} die Widerstände gegen Biege- (y, z) und Torsionsverwölbung (x), A die Querschnittsfläche sowie A_{S_y} und A_{S_z} die Schubflächen. Die Indizes der Verformungsgrößen stehen für den jeweiligen Anteil der Verformung aus Biegung (b) und Schub (s). Für einen Rechteckquerschnitt ergeben sich die folgenden geometrischen Werte zu

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (2.53)$$

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} \quad (2.54)$$

$$I_x \approx \frac{b^3 \cdot h}{3} \cdot \left(1 - 0,63 \cdot \frac{b}{h} \cdot \left(1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \right) \text{ für } b < h \quad (2.55)$$

$$A = b \cdot h \quad (2.56)$$

$$A_{S_y} = A_{S_z} = \frac{6}{5} \cdot b \cdot h \quad (2.57)$$

$$I_{\omega_z} = \frac{b \cdot h^3}{1008} \quad (2.58)$$

$$I_{\omega_y} = \frac{b^3 \cdot h}{1008} \quad (2.59)$$

$$I_{\omega_x} \approx \frac{b^3 \cdot h^3}{144} \text{ für } h/b \geq 5 \text{ nach Wlassow [70] bzw. Petersen [55].} \quad (2.60)$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen im globalen Koordinatensystem folgen die Bedingungen

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x \quad (2.61)$$

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q_y \quad (2.62)$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z \quad (2.63)$$

$$\frac{dM_x}{dx} = -m_x \quad (2.64)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = -m_y + Q_z \quad (2.65)$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -m_z + Q_y \quad (2.66)$$

aus denen die Beziehungen

$$N_x = - \int q_x dx \quad (2.67)$$

$$Q_y = - \int q_y dx \quad (2.68)$$

$$Q_z = - \int q_z dx \quad (2.69)$$

$$M_x = - \int m_x dx \quad (2.70)$$

$$M_y = - \int \int q_z dx^2 - \int m_y dx \quad (2.71)$$

$$M_z = - \int \int q_y dx^2 - \int m_z dx \quad (2.72)$$

folgen. Daraus lassen sich im Zusammenhang mit Gl. (2.47) bis Gl. (2.52) die konstitutiven Beziehungen zwischen Schnittgrößen, Material- und Querschnittskenngrößen

$$N_x = EAu' \quad (2.73)$$

$$Q_y = -EI_{\omega_z} v_s'' + GA_{S_z} v_s' \quad (2.74)$$

$$Q_z = -EI_{\omega_y} w_s'' + GA_{S_y} w_s' \quad (2.75)$$

$$M_x = -EI_{\omega_x} \vartheta'' + GI_x \vartheta' \quad (2.76)$$

$$M_y = -EI_y w_b'' \quad (2.77)$$

$$M_z = EI_z v_b'' \quad (2.78)$$

nach Hofmann [35] herleiten.

Diese konstitutiven Beziehungen, Gl. (2.73) bis Gl. (2.78), gelten unter Vernachlässigung von Produkten aus Verformungsgrößen. In diesem Fall gelten für die Schnittgrößen im lokalen Koordinaten-System die gleichartigen konstitutiven Beziehungen

$$N_\xi = EAu' \quad (2.79)$$

$$Q_\eta = -EI_{\omega_z} v_s'' + GA_{S_z} v_s' \quad (2.80)$$

$$Q_\zeta = -EI_{\omega_y} w_s'' + GA_{S_y} w_s' \quad (2.81)$$

$$M_\xi = -EI_{\omega_x} \vartheta'' + GI_x \vartheta' \quad (2.82)$$

$$M_\eta = -EI_y w_b'' \quad (2.83)$$

$$M_\zeta = EI_z v_b'' \quad (2.84)$$

wie für die Schnittgrößen im globalen Koordinaten System.

Unter Berücksichtigung von Produkten von Verformungsgrößen und unter Vernachlässigung der Schubverformungen gelten die konstitutiven Beziehungen der Momente im lokalen Koordinatensystem

$$M_\xi = GI_x \kappa_\xi \quad (2.85)$$

$$M_\eta = EI_y \kappa_\eta \quad (2.86)$$

$$M_\zeta = EI_z \kappa_\zeta \quad (2.87)$$

in Abhängigkeit von der Krümmung κ um die indizierte Achse. Nach Roik [60] ergeben sich Krümmungen im lokalen Koordinatensystem, deren Herleitung im Anhang, Kap. A.1, dargestellt ist, zu

$$\kappa_\xi = \vartheta' + w' v'' - v' w'' \quad (2.88)$$

$$\kappa_\eta = -w'' + 2\vartheta v'' \quad (2.89)$$

$$\kappa_\zeta = v'' + 2\vartheta w'' \quad (2.90)$$

so dass für die lokalen Momente

$$M_\xi = GI_x (\vartheta' + w' v'' - v' w'') \quad (2.91)$$

$$M_\eta = EI_y (-w'' + 2\vartheta v'') \quad (2.92)$$

$$M_\zeta = EI_z (v'' + 2\vartheta w'') \quad (2.93)$$

und daraus mit Gl. (2.18) für die globalen Momente folgend

$$M_x = GI_x (\vartheta' + w' v'' - v' w'') + EI_y w'' v' - EI_z v'' w' \quad (2.94)$$

$$M_y = GI_x \vartheta v' + EI_y (-w'' + 2\vartheta v'') - EI_z \vartheta v'' \quad (2.95)$$

$$M_z = GI_x \vartheta w' - EI_y \vartheta w'' + EI_z (v'' + 2\vartheta w'') \quad (2.96)$$

gilt.

2.1.5 Linearisierung der Differentialgleichungen

Das Einsetzen der konstitutiven Beziehungen Gl. (2.94) bis Gl. (2.96) sowie Gl. (2.79) bis Gl. (2.81) in das Differentialgleichungssystem Gl. (2.44) bis Gl. (2.46) führt zu dem gekoppelten, nichtlinearen Differentialgleichungssystem

$$GI_x (\vartheta'' + wv''' - vw''') + EI_y v'' w'' - EI_z v'' w'' + q_z z_{qz} \vartheta - q_y y_{qy} \vartheta + m_x = 0 \quad (2.97)$$

$$GT_x (\vartheta' w')'' - EI_y (w'' - 2\vartheta v'')'' - EI_z (v'' \vartheta)'' + EA (u' w')' + q_z = 0 \quad (2.98)$$

$$GT_x (\vartheta' v')'' - EI_y (w'' \vartheta)'' + EI_z (v'' - 2\vartheta w'')'' + EA (u' v')' + q_y = 0, \quad (2.99)$$

das nicht ohne großen mathematischen Aufwand zu lösen ist. Üblicherweise wird das Differentialgleichungssystem Gl. (2.44) bis Gl. (2.46) durch Linearisierungen und Streichung von vernachlässigbar kleinen Termen weiter vereinfacht.

Bei dieser Vereinfachung werden zunächst alle Terme mit Produkten von Verformungsgrößen als vernachlässigbar klein gestrichen. Weiter werden die Schnittgrößen im lokalen Koordinatensystem, die unter Berücksichtigung von kleinen Verdrehungen ermittelt und mit Verformungsgrößen multipliziert werden, durch Schnittgrößen im globalen Koordinatensystem, die unter Vernachlässigung von Verformungsgrößen ermittelt werden, ersetzt. Die entstandenen Terme $(M_x w')''$ und $(M_x v')''$ werden ebenfalls gestrichen. Der Einfluss der Vernachlässigung der beiden Terme unter dem Stichwort Vernachlässigung der Hauptkrümmung wurde von Chwalla [22] untersucht. Auf diese Untersuchung wird in Kap. 2.2.3 näher eingegangen. Es folgt das Gleichungssystem

$$M'_\xi - M_y v'' - M_z w'' + q_z z_{qz} \vartheta - q_y y_{qy} \vartheta + m_x = 0 \quad (2.100)$$

$$M''_\eta - (M_z \vartheta)'' - (N_x w')' + q_z = 0 \quad (2.101)$$

$$M''_\zeta + (M_y \vartheta)'' - (N_x v')' + q_y = 0. \quad (2.102)$$

Die übrigen lokalen Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung werden durch Einsetzen der konstitutiven Beziehungen nach Gl. (2.79) bis Gl. (2.84), i. A. unter Vernachlässigung der Schubverformungen, ersetzt. Es folgt das üblicherweise verwendete Gleichungssystem

$$GI_x \vartheta'' - EI_{\omega_x} \vartheta'''' - M_y v'' - M_z w'' + q_z z_{qz} \vartheta - q_y y_{qy} \vartheta + m_x = 0 \quad (2.103)$$

$$EI_y w'''' - (M_z \vartheta)'' - (N_x w')' + q_z = 0 \quad (2.104)$$

$$EI_z v'''' + (M_y \vartheta)'' - (N_x v')' + q_y = 0. \quad (2.105)$$

Das linearisierte Gleichungssystem gilt für einen ideal geraden Stab ohne Vorverformungen. Das Gleichungssystem beschreibt ein Verzweigungsproblem. Das heißt, es gibt Belastungszustände, bei denen mehrere bzw. unendlich viele Verformungszustände möglich sind. Dieser Belastungszustände werden Verzweigungspunkte und der Betrag der Belastung wird 'kritische Last' genannt. Zu jeder kritischen Last gehört eine Verformungsfigur. Über die Größe der Verformungen kann jedoch keine Aussage gemacht werden. Das Verzweigungsproblem ist mathematisch eine Eigenwertaufgabe. Dabei ist der Eigenwert als 'kritische Last' und der zugehörige Eigenvektor als zugehörige Verformungsfigur, auch Eigenform genannt, zu deuten.

Die Streichung der Terme mit Produkten von Verformungsgrößen sowie das Einsetzen der konstitutiven Beziehungen nach Gl. (2.73) bis Gl. (2.78) hat zur Folge, dass das Differentialgleichungssystem Gl. (2.103) bis Gl. (2.105) nur die Reaktion des Biegestabs im Bereich von sehr kleinen Verformungsgrößen darstellen kann. Nähert sich die Beanspruchung der kritischen Last stellen sich große Verformungen, Verdrehungen und Krümmungen ein. Das Verhalten des Stabs in der Nähe der kritischen Last wird daher mit dem linearisierten Gleichungssystem nur unzureichend beschrieben.

Der Einfluss des Einsetzens der Schnittgrößen, die unter Vernachlässigung von Verformungsgrößen ermittelt werden, wurde von Carl [17] näher untersucht. Er entwarf einen Rechen-Algorithmus, mit dem er iterativ die Schnittgrößen, die unter Vernachlässigung von Verformungsgrößen ermittelt werden, durch diejenigen, die unter Berücksichtigung von kleinen Verdrehungen ermittelt werden, ersetzt hat. Diesen Rechen-Algorithmus hat er auf verschiedene beispielhafte Modelle profilierter Stahlträger mit unterschiedlichen Lagerbedingungen und Lasteinleitungen angewendet. Beim Vergleich der Lösungen mit und ohne Iteration der Schnittgrößen fiel Carl [17] auf, „dass die Größe der auftretenden Differenzen stark von Belastungs- und Steifigkeitsverhältnissen des betrachteten Systems abhängig ist“ und „dass bei Trägern, die aufgrund ihrer Torsionssteifigkeit stark kippgefährdet sind, auch die Abweichungen am größten sind.“ Außerdem ist den Ergebnissen zu entnehmen, dass bei nahezu allen Untersuchungen durch die Iteration der Schnittgrößen die Beanspruchung abgemindert oder anders ausgedrückt die zulässige Beanspruchung erhöht wurde. Das heißt, die Berechnung mit linearisierten Schnittgrößen, die unter Vernachlässigung von Verformungsgrößen ermittelt werden, liegt 'auf der sicheren Seite'. Einzig beim beidseitig vollständig eingespannten Träger mit einer auf halber Trägerlänge, senkrecht zur Stabachse angeordneten Einzellast kam es zu leicht erhöhten Biegespannungen, die zulässige Beanspruchung änderte sich jedoch nur unwesentlich.

2.2 Das Kippen

2.2.1 Lösung des Stabilitätsproblems

Der beidseitig gabelgelagerte durch zwei an den Rändern entgegengesetzt angreifende im Betrag gleich große Einzelmomente M_y beanspruchte Einfeldträger wird im Allgemeinen als Ersatzstab des Kippstabilitätsproblems verwendet, da für diesen Sonderfall eine analytisch exakte Lösung des Differentialgleichungssystems existiert. Dieses Beispiel eignet sich daher besonders dazu den Einfluss einiger Parameter zu untersuchen. In diesem Kapitel wird das Modell dieses Ersatzstabs einer genaueren Betrachtung unterzogen. In Bild 2.6 ist das räumliche Modell des Stabs und in Bild 2.7 das ebene statische Modell des Stabs mit Beanspruchung durch die Einzelmomente dargestellt.

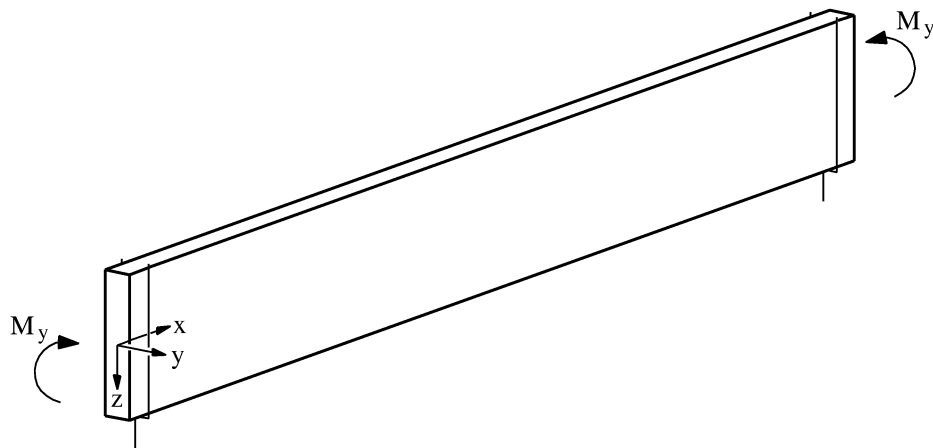


Bild 2.6: Räumliches Modell des Kipp-Ersatzstabes

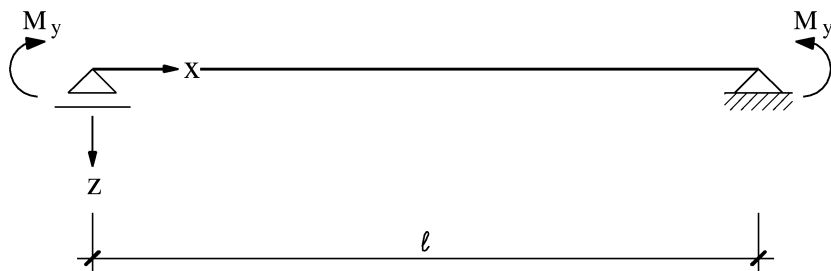


Bild 2.7: Ebenes statisches Modell des Kipp-Ersatzstabes

Beansprucht wird der Kipp-Ersatzstab nur durch das konstant über die Stablänge wirkende Moment M_y . Alle anderen äußeren Schnittgrößen sind daher gleich Null und das Gleichungssystem Gl. (2.103) bis Gl. (2.105) kann in der Form

$$GI_x \vartheta'' - EI_{\omega_x} \vartheta'''' - M_y v'' = 0 \quad (2.106)$$

$$EI_y w'''' = 0 \quad (2.107)$$

$$EI_z v'''' + M_y \vartheta'' = 0. \quad (2.108)$$

beschrieben werden. Wird für die Verformungen ein sinusförmiger Ansatz der Form

$$\vartheta(x) = \vartheta_m \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{\ell}\right) \quad (2.109)$$

$$v(x) = v_m \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{\ell}\right) \quad (2.110)$$

gewählt, der die Randbedingungen des Kipp-Ersatzstabes erfüllt, kann die kritische Last des Kipp-Ersatzstabes

$$\begin{aligned} M_{y,crit} &= \sqrt{GI_x EI_z \frac{\pi^2}{\ell^2} + EI_z EI_{\omega_x} \frac{\pi^4}{\ell^4}} = \\ &= \frac{\pi}{\ell} \cdot \sqrt{GI_x EI_z} \cdot \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_{\omega_x}}{\ell^2 GI_x}} \end{aligned} \quad (2.111)$$

ermittelt werden. Der Index m bei den Verformungsgrößen steht für den Betrag der größten Verformung in Stabmitte. Der Parameter ℓ bezeichnet die Länge des Ersatzstabes.

2.2.2 Einfluss des Wölbwiderstands des Querschnitts

Die kritische Last des Kipp-Ersatzstabs unter Vernachlässigung des Wölbwiderstands des Querschnitts

$$M_{y,crit} = \frac{\pi}{\ell} \cdot \sqrt{GI_x EI_z}, \quad (2.112)$$

die schon im Jahr 1899 von Prandtl [58] hergeleitet wurde, unterscheidet sich von der kritischen Last unter Berücksichtigung des Wölbwiderstands des Querschnitts nach Gl. (2.111) durch den Faktor

$$k_{woelb} = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_{\omega_x}}{\ell^2 GI_x}}, \quad (2.113)$$

der hier als Wölb-Faktor bezeichnet wird. Neben dem materialabhängigen Verhältnis E/G wird er auch beeinflusst von den geometrischen Verhältnissen Höhe zu Breite zu Länge.

Um hier genauere Aussagen treffen zu können, werden zunächst die beiden geometrischen Widerstände I_x und I_{ω_x} nach Gl. (2.55) und Gl. (2.60) in Gl. (2.113) eingesetzt. Die sich ergebende Gleichung

$$k_{woelb} = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \cdot E}{48 \cdot G} \cdot \frac{h^2}{\ell^2} \cdot \frac{1}{1 - 0,63 \cdot \frac{b}{h} \cdot \left(1 - \frac{b^4}{12 \cdot h^4}\right)}} \quad (2.114)$$

$$= \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \cdot E}{48 \cdot G} \cdot \frac{h^2}{\ell^2} \cdot f\left(\frac{h}{b}\right)}$$

für $h/b \geq 5$ mit der vereinfachten Darstellung

$$f\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{1}{1 - 0,63 \cdot \frac{b}{h} \cdot \left(1 - \frac{b^4}{12 \cdot h^4}\right)} \quad (2.115)$$

kann auf den Einfluss der einzelnen Parameter untersucht werden.

Die Funktion $f(h/b)$ nimmt für Verhältnisse h/b grösser 5 näherungsweise den Wert 1 an. Für kleinere Verhältnisse kann keine Angabe gemacht werden. Dies ist aber auch nicht notwendig, da Stäbe mit $h/b \leq 5$ nicht kippgefährdet sind. Damit ist klar, dass für Verhältnisse h/b kleiner 5 (bei Rechteckquerschnitten) der Einfluss des Wölbwiderstands kleiner wird und für quadratische Querschnitte bei Null liegt. Für grössere Verhältnisse h/b hat das Verhältnis selber keinen Einfluss mehr bzw. es hat nur noch insofern Einfluss, dass es die beiden anderen Einflussfaktoren des Wölb-Faktors, h/ℓ und E/G , nicht abmindert oder vergrößert. Biegestäbe sind in der Regel genau dann kippgefährdet, wenn das h/b -Verhältnis größer als 5 ist. Der Wölb-Faktor kann also für Querschnitte kippgefährdeter Stäbe näherungsweise durch

$$k_{woelb} \approx \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \cdot E}{48 \cdot G} \cdot \frac{h^2}{\ell^2}} \quad \text{für } \frac{h}{b} \geq 5 \quad (2.116)$$

angegeben werden. In Bild 2.8 ist der Verlauf von k_{woelb} für Holz der Festigkeitsklasse C24 in Abhängigkeit vom Verhältnis h/ℓ dargestellt. Es wird deutlich, dass durch die Berücksichtigung des Wölbwiderstands des Querschnitts für Verhältnisse h/ℓ kleiner als ein Viertel nur noch weniger als 10 Prozent Erhöhung der kritischen Last möglich ist. Daraus folgt, dass die Berücksichtigung des Wölbwiderstands bei der Untersuchung von biegedrillknickgefährdeten Holzstäben, deren h/ℓ -Verhältnisse in der Regel deutlich kleiner als ein Viertel sind, nur eine geringe Erhöhung der Tragfähigkeit ermöglicht. Da der Wölb-Faktor $k_{woelb,BDK}$ außerdem nicht kleiner als 1 werden kann, liegt eine Nichtberücksichtigung des Wölbwiderstands bei Ermittlung der kritischen Last von biegedrillknickgefährdeten Holzstäben 'auf der sicheren Seite'.

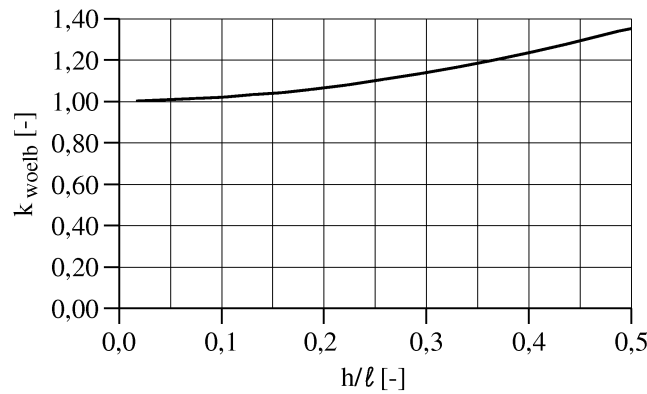


Bild 2.8: Korrekturwert für den Einfluss des Wölbwiderstands in Abhängigkeit von h/ℓ für Stäbe aus Holz der Festigkeitsklasse C24

2.2.3 Einfluss der Hauptkrümmung

In Kap. 2.1.5 werden bei der Herleitung der Differentialgleichung für das vereinfachte Kipp-Problem sämtliche Produkte von Verformungsgrößen ersatzlos gestrichen. Dies kann geschehen, wenn angenommen wird, dass die Verformungsgrößen vernachlässigbar klein sind. Beim vereinfachten Kipp-Problem (siehe Bild 2.6) können die Krümmungen um die y -Achse nicht von vornherein als vernachlässigbar klein angenommen werden, da die Hauptbeanspruchung, das Moment um die y -Achse, eine hauptsächliche Krümmung um die y -Achse erzeugt. Wird angenommen, dass diese sogenannte Hauptkrümmung als einzige Verformungsgröße einen endlichen Wert annimmt, und somit Produkte von Verformungsgrößen mit der Hauptkrümmung nicht vernachlässigt werden, kann der Einfluss der Hauptkrümmung untersucht werden.

Chwalla [22] hat bereits 1939 den Einfluss der Hauptkrümmung auf die kritische Last untersucht. Dabei vernachlässigte er den Einfluss des Wölbwiderstands des Querschnitts. Der anschauliche Ansatz

$$M'_\xi - M_\eta \kappa_z + M_\zeta \kappa_y = 0 \quad (2.117)$$

$$M'_\zeta + M_\eta \tau - M_\xi \kappa_y = 0 \quad (2.118)$$

mit

$$\tau = \vartheta' - w''v' \quad (2.119)$$

$$\kappa_y = -w'' = \frac{M_y}{EI_y} \quad (2.120)$$

$$\kappa_z = v'' + w''\vartheta. \quad (2.121)$$

und

$$M_\xi = GI_x \tau = GI_x (\vartheta' - w'' v') \quad (2.122)$$

$$M_\eta = M_y = \text{const.} \quad (2.123)$$

$$M_\zeta = EI_z \kappa_y = EI_z (v'' + w'' \vartheta). \quad (2.124)$$

führt über

$$GI_x \vartheta'' - M_y v'' \left(1 - \frac{GI_x}{EI_y} - \frac{EI_z}{EI_y} \right) + M_y^2 \vartheta \cdot \frac{EI_y - EI_z}{EI_y^2} = 0 \quad (2.125)$$

$$EI_z v'''' - M_y \vartheta'' \left(1 - \frac{GI_x}{EI_y} - \frac{EI_z}{EI_y} \right) + M_y^2 v'' \cdot \frac{EI_y - GI_x}{EI_y^2} = 0 \quad (2.126)$$

mit sinusförmigen Verformungsansätzen, wie in Gl. (2.109) bis Gl. (2.110), nach zahlreichen Umformungen zu der kritischen Last

$$\begin{aligned} M_{y,crit} &= \frac{\pi}{\ell} \cdot \sqrt{\frac{GI_x EI_z}{\left(1 - \frac{EI_z}{EI_y}\right) \cdot \left(1 - \frac{GI_x}{EI_y}\right)}} = \\ &= \frac{\pi}{\ell} \cdot \sqrt{GI_x EI_z} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{EI_z}{EI_y}\right) \cdot \left(1 - \frac{GI_x}{EI_y}\right)}} \end{aligned} \quad (2.127)$$

die sich durch den Korrekturfaktor

$$k_{HK} = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{EI_z}{EI_y}\right) \cdot \left(1 - \frac{GI_x}{EI_y}\right)}} \quad (2.128)$$

von der kritischen Last nach Prandtl (Gl. (2.112)) unterscheidet. In Bild 2.9 ist der Korrekturfaktor k_{HK} in Abhängigkeit vom Verhältnis h/b für einen rechteckigen Stab aus Bauholz der Festigkeitsklasse C24 dargestellt.

Es wird deutlich, dass die Hauptkrümmung nur dann einen Einfluss hat, wenn das Verhältnis von Höhe zu Breite eines Stabquerschnitts unter den Wert vier sinkt. Stäbe aus Bauholz mit solchen Querschnitten sind jedoch praktisch nicht kippsgefährdet, da ein Materialversagen bereits einsetzt, bevor der Stab zu kippen beginnt. Ist das Verhältnis von Höhe zu Breite größer als vier, ist der Einfluss der Hauptkrümmung vernachlässigbar klein, denn der Stab beginnt zu kippen, bevor die Hauptkrümmung einen endlich großen Wert annimmt.

Der Einfluss der Hauptkrümmung kann demnach bei der Untersuchung von stabilitätsgefährdeten Biegestäben aus Bauholz vernachlässigt werden. Dennoch sei an dieser Stelle

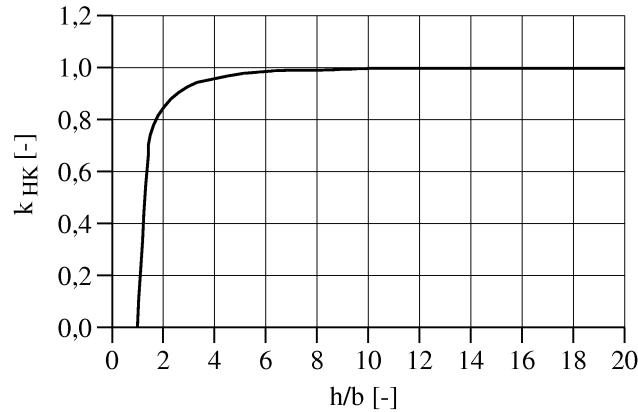


Bild 2.9: Einfluss der Hauptkrümmung in Abhängigkeit vom Verhältnis h/b für Stäbe aus Holz der Festigkeitsklasse C24

darauf hingewiesen, dass die Annahmen von Chwalla (Gl. (2.117)) nur eine grobe Abschätzung darstellen. Wird das Differentialgleichungssystem Gl. (2.44) bis Gl. (2.46) mit Produkten von Verformungsgrößen auf das Kipp-Problem angewendet und werden alle Terme mit Produkten von Verformungsgrößen gestrichen ausser jenen, in welchen die Hauptkrümmung w'' enthalten ist, so folgen die Gleichungen

$$M'_\xi - M_\eta (v'' - \vartheta w'') + (M_\eta \vartheta w')' - M_\zeta (w'' + \vartheta v'') = 0 \quad (2.129)$$

$$(M'_\xi (w' + v' \vartheta))'' + (M_\eta (\vartheta - v' w'))'' + M''_\zeta = 0. \quad (2.130)$$

Werden die konstitutiven Beziehungen der globalen Momente M_ξ nach Gl. (2.91) und M_ζ nach Gl. (2.93) sowie der Ansatz für das Hauptmoment M_y nach Gl. (2.123) und die Hauptkrümmung w'' nach Gl. (2.120) in Gl. (2.129) und Gl. (2.130) eingesetzt, so folgt das Gleichungssystem

$$GI_x (\vartheta' - v' w'' + v'' w')' - M_y (v'' - 2\vartheta w'' - \vartheta' w') - EI_z v'' w'' - 2EI_z \vartheta w''^2 = 0 \quad (2.131)$$

$$(GI_x w' \vartheta') + M_y (\vartheta - v' w')'' + EI_z (v'' + 2\vartheta w'')'' = 0, \quad (2.132)$$

das nach Durchführung der Ableitungen und darauf folgender Streichung von Produkten von Verformungsgrößen ohne die Hauptkrümmung w'' zum Gleichungssystem

$$GI_x \vartheta'' - M_y v'' \left(1 - \frac{EI_z}{EI_y}\right) - 2M_y^2 \vartheta \frac{EI_y - EI_z}{EI_y^2} = 0 \quad (2.133)$$

$$EI_z v'''' + M_y \vartheta'' \left(1 - 2\frac{GI_x}{EI_y} - 2\frac{EI_z}{EI_y}\right) + 2M_y^2 v'' \frac{1}{EI_y} = 0 \quad (2.134)$$

führt. Dieses Gleichungssystem unterscheidet sich von dem, das sich aus den Ansätzen von Chwalla herleiten lässt. Da es sich nicht ohne größeren mathematischen Aufwand

lösen lässt, ist eine Überprüfung der Größe der Abweichung von Chwallas Näherungslösung zur genaueren Lösung nach Gl. (2.131) und Gl. (2.132) nicht Gegenstand dieser Arbeit. Die in Kap. 5 dargestellten Vergleiche der analytischen Lösung unter Vernachlässigung der Hauptkrümmung mit der numerischen Lösung unter Berücksichtigung der Hauptkrümmung zeigt, dass der Einfluss der Hauptkrümmung tatsächlich vernachlässigbar klein ist.

2.2.4 Einfluss der Imperfektionen

Die in den vorherigen Kapiteln dargestellten Zusammenhänge beziehen sich allesamt auf einen quasi-perfekten Biegestab. Das heißt, der Stab ist durch keine Imperfektionen beeinflusst. Bei der Belastung eines solchen theoretisch denkbaren Stabs treten unterhalb der kritischen Last nur Verformungen in der Hauptrichtung der Belastung auf. Bei dem hier untersuchten Kipp-Ersatzstab verformt sich der Stab daher zunächst nur in z -Richtung. Der Stab befindet sich in einem stabilen Zustand. Mit Erreichen der kritischen Last geht der Stab in einen indifferenten Zustand über, das heißt, es gibt mehrere Verformungszustände, bei denen der Stab sich im Gleichgewicht befindet. Bei Überschreiten der kritischen Last befindet sich der Stab in einem labilen Zustand. Eine minimale Störung bewirkt, dass der Stab aus der Hauptverformungslage schlagartig in einen Verformungszustand mit großen Verformungen in y -Richtung sowie starken Verdrillungen übergeht. Die Ermittlung der kritischen Last an einem quasi-perfekten System wird auch das Lösen eines Stabilitätsproblems genannt. Sofern das Material des Stabs sehr hohe Festigkeiten bzw. ein sehr großes Verformungsvermögen aufweist, ist auch ein überkritisches Verformungsverhalten möglich (vgl. Timoshenko [67], Petersen [55]). Doch das Überschreiten der kritischen Last ist im Allgemeinen im Bauwesen und speziell im Holzbau mit so großen Verformungen verbunden, dass das Material lange vorher versagt.

Quasi-perfekte Stäbe sind rein theoretisch denkbare Bauteile. Tatsächlich weisen alle im Bauwesen verwendeten Teile Imperfektionen auf. Das heißt, sie weichen in allen möglichen Arten und Richtungen von der perfekten Form ab. Da es unmöglich ist, jede tatsächlich vorhandene geometrische und materielle Imperfektion zu berücksichtigen, werden diese idealisiert. Mit Hilfe von idealisierten geometrischen Ersatzimperfektionen, die dem zu untersuchenden Stabilitätsproblem angepasst sind, lassen sich Ansätze formulieren, aus denen ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung hergeleitet werden kann. Das Herstellen dieses eindeutigen Zusammenhangs wird auch das Lösen des Spannungsproblems genannt. Die beim Stabilitätsproblem ermittelte kritische Last wird beim Spannungsproblem nicht behandelt. Sie bleibt gleich. Beim Spannungsproblem geht es um die Beschreibung des Verformungsverhaltens bis zum Erreichen der kritischen Last. Dabei kommt der Wahl von Form und Größe der Ersatzimperfektionen eine besondere Bedeutung zu, da sie die Lösung des Spannungsproblems stark beeinflusst.

Bei der Untersuchung des stabilitätsgefährdeten Biegestabs haben die Verformungen ϑ , v und w einen Einfluss. Bei der Lösung des Stabilitätsproblems in den voran gegangenen Kapiteln wurden sinus-förmige Verformungsansätze gewählt, weil sie die Randbedin-

gungen erfüllen. Werden als Ersatzimperfektionen ebenfalls sinusförmige, spannungslose Vorverformungen gewählt, so ist das Spannungsproblem für den Kipp-Ersatzstab leicht zu lösen. Die Gesamtverformungen des Stabs können dann durch

$$\vartheta(x) = \vartheta_{el}(x) + \vartheta_0(x) = (\vartheta_{el} + \vartheta_0) \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{\ell}\right) \quad (2.135)$$

$$v(x) = v_{el}(x) + v_0(x) = (v_{el} + v_0) \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{\ell}\right) \quad (2.136)$$

$$w(x) = w_{el}(x) + w_0(x) = (w_{el} + w_0) \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{\ell}\right) \quad (2.137)$$

mit den Indizes el für die elastische Verformung und 0 für die spannungslose Vorverformung beschrieben werden. Zur Lösung des Spannungsproblems für den allgemeinen stabilitätsgefährdeten Biegestab, unter Vernachlässigung der Verwölbung des Querschnitts, werden die sinusförmigen Verformungsansätze nach Gl. (2.135) bis Gl. (2.137) in das Gleichungssystem Gl. (2.100) bis Gl. (2.102) eingesetzt. Es folgen die Gleichungen

$$M'_\xi - M_y(v_{el} + v_0)'' - M_z(w_{el} + w_0)'' + q_z z_{qz}(\vartheta_{el} + \vartheta_0) - q_y y_{qy}(\vartheta_{el} + \vartheta_0) + m_x = 0 \quad (2.138)$$

$$M''_\eta - (M_z(\vartheta_{el} + \vartheta_0))'' - (N_x(w_{el} + w_0))' + q_z = 0 \quad (2.139)$$

$$M''_\zeta + (M_y(\vartheta_{el} + \vartheta_0))'' - (N_x(v_{el} + v_0))' + q_y = 0 \quad (2.140)$$

die durch Einsetzen der konstitutiven Beziehungen nach Gl. (2.79) bis Gl. (2.84) zu

$$GI_x \vartheta'' - M_y(v_{el} + v_0)'' - M_z(w_{el} + w_0)'' + q_z z_{qz}(\vartheta_{el} + \vartheta_0) - q_y y_{qy}(\vartheta_{el} + \vartheta_0) + m_x = 0 \quad (2.141)$$

$$EI_y w'''' - (M_z(\vartheta_{el} + \vartheta_0))'' - (N_x(w_{el} + w_0))' + q_z = 0 \quad (2.142)$$

$$EI_z v'''' + (M_y(\vartheta_{el} + \vartheta_0))'' - (N_x(v_{el} + v_0))' + q_y = 0, \quad (2.143)$$

vereinfacht werden. Die konstitutiven Beziehungen werden durch das Einsetzen der Imperfektionen nicht beeinflusst, da die Vorverformungen spannungsfrei sind.

2.2.5 Lösung des Spannungsproblems

Das Spannungsproblem des Kipp-Ersatzstabs unter Berücksichtigung der Vorkrümmung um die schwache Achse v_0 und der Vorverdrehung der Stabachse ϑ_0 wird durch die Reduzierung der Gleichungen Gl. (2.141) bis Gl. (2.143) auf die vorhandenen Beanspruchungen durch

$$GI_x \vartheta_{el}''(x) - M_y [v_{el}(x) + v_0(x)]'' = 0 \quad (2.144)$$

$$EI_z v_{el}''''(x) + M_y [\vartheta_{el}(x) + \vartheta_0(x)]'' = 0, \quad (2.145)$$

formuliert. Durch Auflösen der Gleichung Gl. (2.145) nach

$$\vartheta_{el}'' = -\frac{1}{M_y} \cdot (EI_z v_{el}''''(x) + M_y \vartheta_0''(x)) \quad (2.146)$$

und anschließend Einsetzen in Gl. (2.144)

$$\frac{GI_x}{M_y} \cdot [-EI_z v_{el}''''(x) - M_y \vartheta_0''(x)] - M_y [v_{el}''(x) + v_0''(x)] = 0 \quad (2.147)$$

ergibt sich nach zweimaliger Integration mit

$$v''(x) = -\frac{\pi^2}{\ell^2} \cdot v \cdot \sin\left(x \frac{\pi}{\ell}\right) \quad (2.148)$$

$$v''''(x) = \frac{\pi^4}{\ell^4} \cdot v \cdot \sin\left(x \frac{\pi}{\ell}\right) \quad (2.149)$$

$$\vartheta''(x) = -\frac{\pi^2}{\ell^2} \cdot \vartheta \cdot \sin\left(x \frac{\pi}{\ell}\right) \quad (2.150)$$

$$\vartheta''''(x) = \frac{\pi^4}{\ell^4} \cdot \vartheta \cdot \sin\left(x \frac{\pi}{\ell}\right) \quad (2.151)$$

und nach dem Herauskürzen der Sinusfunktionen die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{GI_x}{M_y} \cdot \left(\frac{\pi^2}{\ell^2} EI_z v_{el} - M_y \vartheta_0 \right) - M_y (v_{el} + v_0) = \\ &= v_{el} \cdot \left(\frac{GI_x EI_z \pi^2}{M_y \ell^2} - M_y \right) - GI_x \vartheta_0 - M_y v_0, \end{aligned} \quad (2.152)$$

die sich nach der maximalen Verformungsgröße für die Verschiebung in y-Richtung

$$v_{el} = \frac{GI_x \vartheta_0 + M_y v_0}{\frac{GI_x EI_z \pi^2}{M_y \ell^2} - M_y} = \left(\frac{GI_x}{M_y} \vartheta_0 + v_0 \right) \cdot \frac{\frac{M_y^2}{M_{y,crit}^2}}{1 - \frac{M_y^2}{M_{y,crit}^2}} \quad (2.153)$$

auflösen lässt. Mit dem Ausnutzungsfaktor

$$\alpha_M = \frac{M_y}{M_{y,crit}} \quad (2.154)$$

vereinfacht sich die Schreibweise zu

$$v_{el} = \left(\frac{GI_x}{M_y} \vartheta_0 + v_0 \right) \cdot \frac{\alpha_M^2}{1 - \alpha_M^2}. \quad (2.155)$$

Analog lässt sich auch die maximale Verformungsgröße für die Verdrillung

$$\vartheta_{el} = \left(\vartheta_0 + \frac{N_{crit}}{M_y} v_0 \right) \cdot \frac{\alpha_M^2}{1 - \alpha_M^2} \quad (2.156)$$

mit der kritischen Knicklast für den beidseitig gelenkig gelagerten Druckstab, den Eulerstab II,

$$N_{crit} = \frac{EI_z \pi^2}{\ell^2} \quad (2.157)$$

herleiten. Mit den konstitutiven Beziehungen nach Gl. (2.82) und Gl. (2.84) unter Vernachlässigung des Wölbwiderstands ergeben sich die betragsmäßig größten, den Stab beanspruchenden Momente um die z-Achse

$$M_z = \frac{M_y \cdot \vartheta_0 + N_{crit} \cdot \alpha_M^2 \cdot v_0}{1 - \alpha_M^2} \quad (2.158)$$

und um die x-Achse

$$M_x = \frac{\pi}{\ell} \cdot \frac{\alpha_M^2 \cdot GI_x \cdot \vartheta_0 + M_y \cdot v_0}{1 - \alpha_M^2}. \quad (2.159)$$

Dabei ist zu beachten, dass das Moment M_z sinus-förmig, das Moment M_x cosinus-förmig verläuft. Das heißt, das größte Moment um die z-Achse tritt in der Mitte, das größte Moment um die x-Achse an den Enden des Stabs auf. Einen Einfluss auf die Gabellagerung haben diese Momente, insbesondere M_x , nicht, da es sich bei diesen, auf die verformte Stabachse bezogenen, Momenten um Komponenten der äußeren Belastung M_y handelt.

2.2.6 Ersatzstablängen

Für den sogenannten Kipp-Ersatzstab ist eine exakte Lösung, mit den in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Vereinfachungen möglich. Für andere Arten der Momentenbeanspruchung eines Biegestabs sind Lösungen der Differentialgleichungssysteme nur durch mathematische Näherungen zu finden. Bei Pflüger [56] befindet sich eine Auflistung von Lösungen verschiedener Beanspruchungssituationen. Im Anhang Kap. A.4 sind die für diese Arbeit relevanten Lösungen angegeben.

Beispielhaft soll hier die Herleitung der kritischen Last für den rechteckigen, einseitig eingespannten Biegestab mit Einzellast nach Bild 2.10 dargestellt werden. Bei Prandtl [58] ist die Herleitung ohne, bei Timoshenko [66] und [67] die Herleitung mit Berücksichtigung des Wölbwiderstands des Querschnitts nachzulesen. Der Koordinatenursprung wird, wie in Bild 2.10 zu sehen ist, im Schwerpunkt des Querschnitts am freien Ende angenommen. Der Ursprung bleibt auch im verformten Zustand dort, das heißt, die Koordinaten des Auflagers ändern sich bei einer Verformung des freien Endes des Stabs.

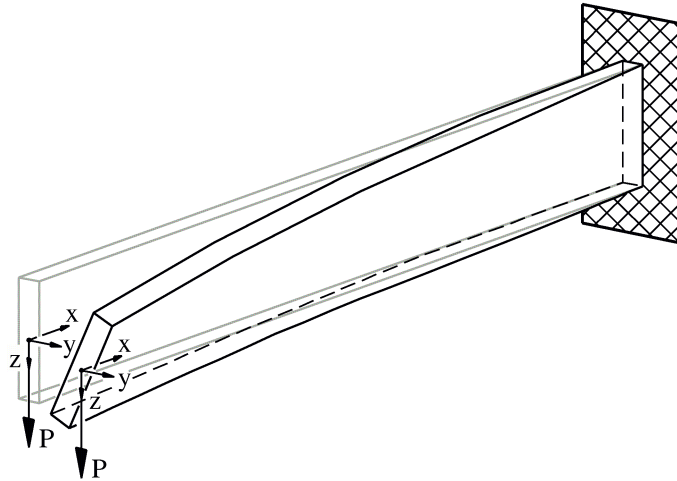


Bild 2.10: Rechteckiger, einseitig eingespannter Biegestab mit Einzellast

Das zu lösende Differentialgleichungssystem des einseitig eingespannten Biegestabs

$$GI_x \vartheta'' - P(v - v'x) = 0 \quad (2.160)$$

$$EI_z v'''' + Px\vartheta'' = 0 \quad (2.161)$$

gibt zuerst Prandtl und später Timoshenko, unter Berücksichtigung des Wölbwiderstands des Querschnitts, an. Die Lösung erfolgt bei beiden durch den Ansatz von Potenzreihen für die Verformungsverläufe. Zunächst wird die Verdrillung des Stabs durch den Reihenansatz

$$\vartheta(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots \quad (2.162)$$

angenommen. Durch Auflösen der Gleichungen Gl. (2.160) und Gl. (2.161) nach der Verdrillung

$$\vartheta'' + \frac{P^2 x^2}{GI_T EI_z} \vartheta = 0 \quad (2.163)$$

und Einsetzen des Reihenansatzes kann für die Koeffizienten A_n die Rekursivformel

$$A_n = -\frac{P^2}{GI_T EI_z n(n-1)} A_{n-4} \quad (2.164)$$

gefunden werden. Es bleiben nur die unabhängigen Koeffizienten A_0 und A_1 übrig, alle anderen sind von diesen abhängig. Für die Verdrillung ergibt sich daher

$$\vartheta(x) = A_0 \left(1 - \frac{P^2 \cdot 1 \cdot 2}{GI_T EI_z \cdot 4!} x^4 + \frac{P^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6}{(GI_T EI_z)^2 \cdot 8!} x^8 - \frac{P^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10}{(GI_T EI_z)^3 \cdot 12!} x^{12} + \dots - \dots \right) + \\ + A_1 \left(x - \frac{P^2 \cdot 2 \cdot 3}{GI_T EI_z \cdot 5!} x^5 + \frac{P^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7}{(GI_T EI_z)^2 \cdot 9!} x^9 - \frac{P^6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 11}{(GI_T EI_z)^3 \cdot 13!} x^{13} + \dots - \dots \right). \quad (2.165)$$

Über den Zusammenhang, der durch Gl. (2.161) zwischen Verdrillung und Verdrehung um die schwache Achse gegeben ist, kann die Verschiebung in y-Richtung durch

$$v(x) = \frac{GI_T}{P} \left[A_0 \left(-\frac{P^2}{GI_T EI_z \cdot 3!} x^3 + \frac{P^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5}{(GI_T EI_z)^2 \cdot 7!} x^7 - \frac{P^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9}{(GI_T EI_z)^3 \cdot 11!} x^{11} + \dots - \dots \right) + \right. \\ + A_1 \left(-\frac{P^2 \cdot 1 \cdot 2}{GI_T EI_z \cdot 4!} x^4 + \frac{P^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6}{(GI_T EI_z)^2 \cdot 8!} x^8 - \frac{P^6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10}{(GI_T EI_z)^3 \cdot 12!} x^{12} + \dots - \dots \right) + \\ \left. + A_2 x + A_3 \right] \quad (2.166)$$

mit den Integrationskonstanten A_2 und A_3 beschrieben werden. Durch Einsetzen der Funktionen $\vartheta(x)$, $v(x)$ und $v'(x)$ in Gl. (2.160) wird

$$A_1 = -A_3 \quad (2.167)$$

ermittelt und durch Einsetzen der Randbedingungen

$$\vartheta(x=0) = \vartheta_0 \quad (2.168)$$

$$v(x=0) = v_0 \quad (2.169)$$

$$v'(x=0) = v'_0 \quad (2.170)$$

ergeben sich die Koeffizienten zu

$$A_0 = \vartheta_0 \quad (2.171)$$

$$A_1 = -\frac{P}{GI_T} v_0 \quad (2.172)$$

$$A_2 = \frac{P}{GI_T} v_0', \quad (2.173)$$

so dass die Verdrillung für diesen Beanspruchungsfall letztendlich mit Hilfe des dimensionslosen Hilfwertes

$$u^2 = \frac{P^2 x^4}{GI_T EI_z} \quad (2.174)$$

durch

$$\begin{aligned} \vartheta(x) = & \vartheta_0 \cdot \left(1 - \frac{u^2 \cdot 1 \cdot 2}{4!} + \frac{u^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6}{8!} - \frac{u^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10}{12!} + \dots - \dots \right) + \\ & + v_0 \cdot \frac{Px}{GI_T} \cdot \left(-1 - \frac{u^2 \cdot 2 \cdot 3}{5!} + \frac{u^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7}{9!} - \frac{u^6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 11}{13!} + \dots - \dots \right). \end{aligned} \quad (2.175)$$

oder abgekürzt

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \cdot R_1(x) + v_0 \cdot \frac{Px}{GI_T} \cdot R_2(x) \quad (2.176)$$

beschrieben werden kann. Die Verformung in y-Richtung kann nun analog ermittelt werden. Die Ermittlung soll hier aber nicht dargestellt werden, da die Verformung in y-Richtung für die Lösung des Stabilitätsproblems nicht benötigt wird. Vielmehr reicht es aus, die bekannte Randbedingung der Verdrillung einzusetzen. Am eingespannten Ende des Stabs ($x = \ell$) muss die Verdrillung den Wert Null annehmen. Das heißt, es gilt

$$\vartheta(x = \ell) = 0 = \vartheta_0 \cdot R_1(x = \ell) + v_0 \cdot \frac{Px}{GI_T} \cdot R_2(x = \ell), \quad (2.177)$$

wobei definitionsgemäß (siehe Bild 2.10) die Anfangsverschiebung in y-Richtung den Wert $v_0 = 0$ annimmt. Da die Anfangsverdrillung ϑ_0 ungleich Null sein kann, muss die Bedingung

$$R_1(x = \ell) = 0 = \left(1 - \frac{u^2 \cdot 1 \cdot 2}{4!} + \frac{u^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6}{8!} - \frac{u^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10}{12!} + \dots - \dots \right), \quad (2.178)$$

erfüllt werden, was nur dann der Fall ist, wenn

$$u = \sqrt{\frac{P^2 \ell^4}{G I_T E I_z}} \approx 4,0126 \quad (2.179)$$

gilt. Daraus folgt nach Gl. (2.174) die kritische Last

$$P_{crit} = \frac{4,0126}{\ell^2} \sqrt{G I_T E I_z}, \quad (2.180)$$

mit deren Hilfe nun die effektive Ersatzstablänge für das Kippen $\ell_{m,ef}$ durch Gleichsetzen des aus der kritischen Last entstehenden maximalen Moments mit dem kritischen Moment des Kipp-Ersatzstabs

$$P_{crit} \cdot \ell = \frac{4,0126}{\ell} \sqrt{G I_T E I_z} = \frac{\pi}{\ell_{m,ef}} \sqrt{G I_T E I_z} \quad (2.181)$$

und Auflösen nach

$$\ell_{m,ef} = \ell \cdot \frac{\pi}{4,0126} \approx 0,783 \cdot \ell \quad (2.182)$$

ermittelt werden kann.

Die Ersatzstablänge ist zunächst einmal nur brauchbar, um das kritische Moment eines vom Ersatzstab abweichenden Modells zu ermitteln. Da zur Ermittlung der Ersatzstablänge eines Modells immer zunächst die kritische Last bekannt sein muss, stellt dieses Verfahren keine echte Vereinfachung, sondern nur eine Umformung dar. Interessant wird es jedoch, wenn diese Ersatzstablänge auch zur näherungsweisen Ermittlung der zusätzlichen Beanspruchungen herangezogen werden kann. Die Gleichung für die Ermittlung von z.B. M_z bei einer äußeren Belastung von ausschliesslich M_y (siehe auch Gl. (5.16)) muss für jedes vom Ersatzstab abweichende Modell extra hergeleitet werden. Wäre es allerdings möglich, durch Einsetzen in die Gleichungen für den Ersatzstab von $\ell_{m,ef}$ für ℓ die zusätzlichen Momente näherungsweise darzustellen, könnte auf die Ermittlung von Berechnungsgleichungen für jedes einzelne Modell verzichtet werden. Im Holzbau ist eine ähnliche Methode beim sogenannten Ersatzstabverfahren bereits Praxis. In wieweit dieses praktische Modell jedoch die Wirklichkeit abbildet, wird in Kap. 6 an diesem Beispiel genauer untersucht.

2.3 Das Biegedrillknicken

2.3.1 Lösung des Stabilitätsproblems

Wird der sogenannte Kipp-Ersatzstab aus Kapitel 2.2.6 zusätzlich durch eine Normalkraft N_x beansprucht, wird die nichtlineare Reaktion des Modells auch Biegedrillknicken

genannt. Somit kann dieses Modell auch Biegedrillknick-Ersatzstab genannt werden. In Bild 2.11 ist dieser Ersatzstab sowie das zugehörige ebene statische Modell in Bild 2.12 mit seinen Beanspruchungen dargestellt.

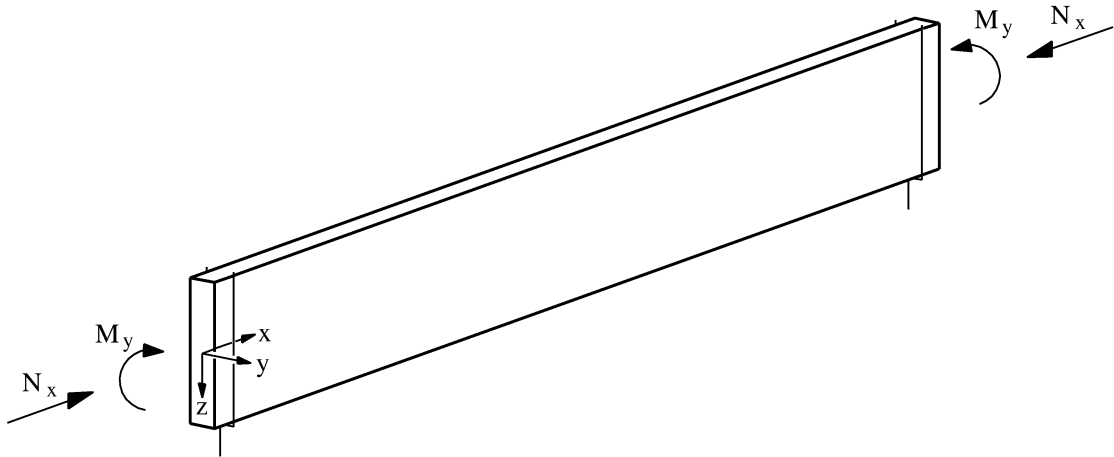


Bild 2.11: Räumliches Modell des Biege-Drill-Knick-Ersatzstabes

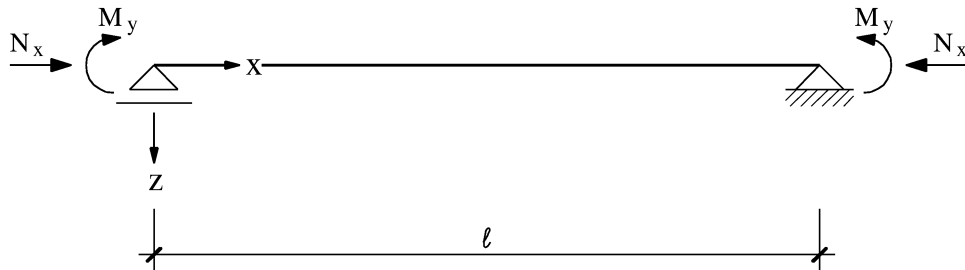


Bild 2.12: Ebenes statisches Modell des Biege-Drill-Knick-Ersatzstabes

Das zu lösende Differentialgleichungssystem unter Berücksichtigung des Wölbwiderstands des Querschnitts

$$GI_x \vartheta'' - EI_{\omega_x} \vartheta'''' - M_y v'' = 0 \quad (2.183)$$

$$EI_y w'''' + N_x w'' = 0 \quad (2.184)$$

$$EI_z v'''' + M_y \vartheta'' + N_x v'' = 0 \quad (2.185)$$

leitet sich aus Gl. (2.103) bis Gl. (2.105) ab. Dabei wurde jedoch zu Gunsten einer besseren Lesbarkeit das Vorzeichen der Normalkraft gegenüber der sonst üblichen Darstellungsweise umgekehrt, da die Normalkraftbeanspruchung eines biegedrillknickgefährdeten Stabs im Allgemeinen eine Druckkraft ist. Eine Zugkraft vermindert die Stabilitätsge-

fahr. Daher wird hier Druck positiv und Zug negativ definiert.

Unter der Annahme einer konstanter Beanspruchung des Stabs durch N_x und M_y sowie sinusförmiger Verformungsansätze für ϑ , v und w ergibt sich über

$$\vartheta = v \cdot \frac{M_y}{GI_x - \frac{\pi^2}{\ell^2} EI_{\omega x}} \quad (2.186)$$

nach Gl. (2.183) das kritische Moment

$$\begin{aligned} M_{y,BDK,crit} &= \sqrt{\left(GI_x + EI_{\omega x} \frac{\pi^2}{\ell^2}\right) \cdot (N_{crit} - N_x)} = \\ &= \sqrt{GI_x \cdot (N_{crit} - N_x)} \cdot \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_{\omega x}}{\ell^2 GI_x}} \end{aligned} \quad (2.187)$$

für den Biegedrillknick-Ersatzstab. Es zeigt sich, dass sich der Einfluss des Wölbwiderstands gegenüber dem des Kipp-Ersatzstabs nach Gl. (2.113) nicht verändert hat. Das heißt die Angaben aus Kapitel 2.2.2 gelten auch für den Biegedrillknick-Ersatzstab. Das kritische Moment unter Vernachlässigung des Wölbwiderstands des Querschnitts ergibt sich zu

$$M_{y,BDK,crit} = \sqrt{GI_x \cdot (N_{crit} - N_x)} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{GI_T EI_z} \sqrt{1 - \frac{N}{N_{crit}}} \quad (2.188)$$

oder nach der kritischen Normalkraft aufgelöst zu

$$N_{x,BDK,crit} = \frac{\frac{\pi^2}{\ell^2} GI_x EI_z - M_y^2}{GI_x} = N_{crit} - \frac{M_y^2}{GI_x}. \quad (2.189)$$

Es wird deutlich, dass die kritische Last für das Biegedrillknick-Problem aus einer Kombination aus Hauptmoment und Normalkraft besteht. Durch weitere Umformung kann die normierte Interaktion für die Verhältnisse $N/N_{crit} = \alpha_N$ und $M/M_{crit} = \alpha_M$

$$\frac{N_x}{N_{x,crit}} = 1 - \frac{M_y^2}{M_{y,crit}^2} \Rightarrow \alpha_N = 1 - \alpha_M^2 \quad (2.190)$$

ermittelt werden. Der zugehörige Graph ist in Bild 2.13 dargestellt. Die abgebildete Interaktionskurve gilt für alle Knick- (λ_c) und Kipp-Schlankheiten (λ_m).

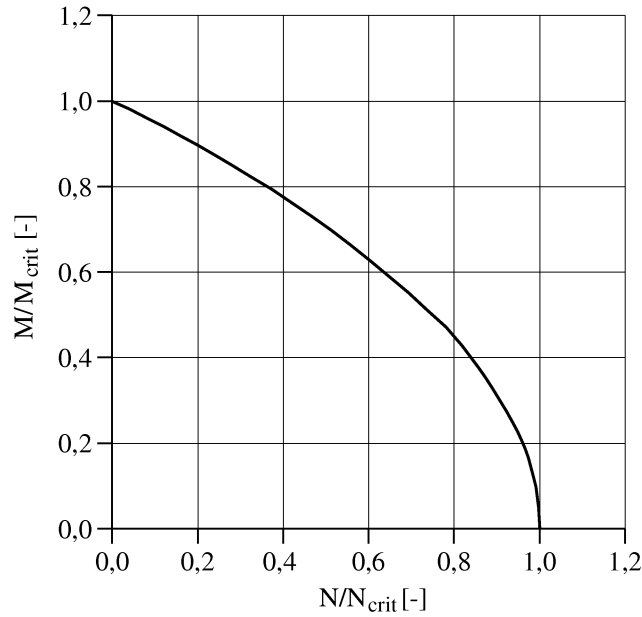


Bild 2.13: Interaktion von kritischem Hauptmoment und kritischer Normalkraft beim Biegedrillknicken

2.3.2 Lösung des Spannungsproblems

Das Spannungsproblem des Biegedrillknick-Ersatzstabs kann analog zum Kipp-Ersatzstab gelöst werden. Mittels Ersetzen der Gesamtverformungen durch die Summe aus den jeweiligen sinusförmigen elastischen Verformungen und Vorverformungen in Gl. (2.183) und Gl. (2.185) ergeben sich unter Vernachlässigung des Wölbwiderstands des Querschnitts die Gleichungen

$$GI_x \vartheta_{el}'' - M_y (v_{el} + v_0)'' = 0 \quad (2.191)$$

$$EI_z v_{el}'''' + M_y (\vartheta_{el} + \vartheta_0)'' + N_x (v_{el} + v_0)'' = 0, \quad (2.192)$$

die über

$$\vartheta_{el} = -\frac{M_y}{GI_x} \cdot (v_{el} + v_0) = \quad (2.193)$$

und

$$v_{el} = -\frac{GI_x}{M_y} \cdot \vartheta_{el} - v_0 \quad (2.194)$$

mit den Vereinfachungen

$$\alpha_M = \frac{M_y}{M_{y,crit}} \quad (2.195)$$

$$\alpha_N = \frac{N_x}{N_{crit}}, \quad (2.196)$$

wobei N_{crit} nach Gl. (2.157) und $M_{y,crit}$ nach Gl. (2.112) zu ermitteln sind, zu den elastischen Verformungsgrößen

$$v_{el} = \left[\left(1 + \frac{N \cdot GI_x}{M_y^2} \right) v_0 + \frac{GI_x}{M_y} \vartheta_0 \right] \cdot \frac{\alpha_M^2}{1 - \alpha_N - \alpha_M^2} \quad (2.197)$$

und

$$\vartheta_{el} = \left(\vartheta_0 + \frac{N_{crit}}{M_y} v_0 \right) \cdot \frac{\alpha_M^2}{1 - \alpha_N - \alpha_M^2} \quad (2.198)$$

sowie den betragsmäßig größten zusätzlichen Momenten um die z-Achse

$$M_z = \frac{M_y \cdot \vartheta_0 + (N_x + N_{crit} \cdot \alpha_M^2) \cdot v_0}{1 - \alpha_N - \alpha_M^2} \quad (2.199)$$

und um die x-Achse

$$M_x = \frac{\pi}{\ell} \cdot \frac{\alpha_M^2 \cdot GI_x \cdot \vartheta_0 + M_y \cdot v_0}{1 - \alpha_N - \alpha_M^2} \quad (2.200)$$

aufgelöst werden können.

2.3.3 Ersatzstablängen

In Kapitel 2.2.6 wurde dargestellt, dass für Modelle, die vom Kipp-Ersatzstab abweichen, durch Einsetzen der sogenannten Ersatzstablänge das kritische Moment mit der Bestimmungsgleichung Gl. (2.181) für den Kipp-Ersatzstab ermittelt werden kann. In diesem Kapitel wird untersucht, ob die Ersatzstablängen, die für das Kippen ermittelt werden können, auch auf das Biegedrillknicken übertragbar sind. Als Beispiel dient wieder der in Bild 2.14 dargestellte rechteckige, einseitig eingespannte Biegestab, diesmal mit je einer Einzellast P in die Haupttragrichtung (y-Achse) und N_x in Richtung der Stabachse (x-Achse). Dabei wird auch hier der Einfluss des Wölbwiderstands des Querschnitts vernachlässigt.

Das zu lösende Differentialgleichungssystem nimmt die Form

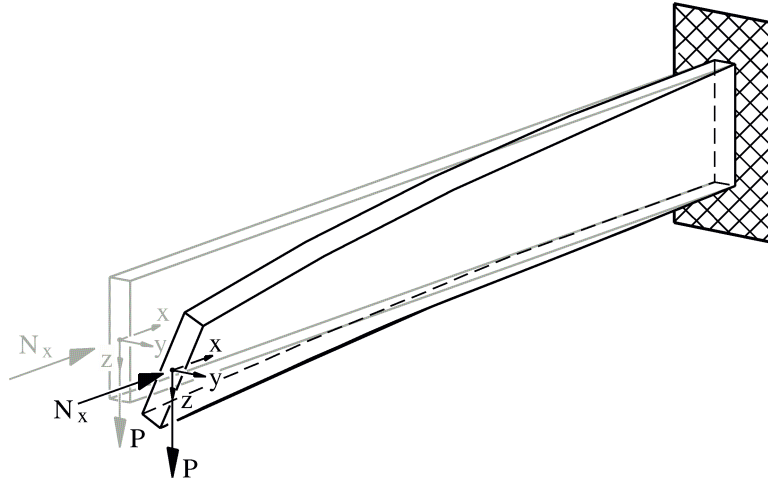


Bild 2.14: Rechteckiger, einseitig eingespannter Biegestab mit Einzellasten

$$GI_x \vartheta'' - P(v - v'x) = 0 \quad (2.201)$$

$$EI_z v'''' + Px\vartheta'' + N_x v'' = 0 \quad (2.202)$$

an. Mit dem gleichen Potenzreihenansatz wie für das Kippen wird zunächst die Verdrillung

$$\vartheta(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots \quad (2.203)$$

angegeben. Das Auflösen des Differentialgleichungssystems nach der Verdrillung

$$\vartheta'' + \frac{P^2 \cdot x^2 + N_x \cdot GI_T}{GI_T \cdot EI_z} \vartheta = 0 \quad (2.204)$$

führt zu der etwas komplizierteren Rekursivformel für A_n in der Form

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{N_x}{EI_z \cdot n(n-1)} A_{n-2} - \frac{P^2}{GI_T \cdot EI_z \cdot n(n-1)} A_{n-4} \\ &= -\frac{r^2}{n(n-1)} A_{n-2} - \frac{u^2}{n(n-1)} A_{n-4} \end{aligned} \quad (2.205)$$

mit den Substitutionen

$$r^2 = \frac{N_x}{EI_z} \quad (2.206)$$

und

$$u^2 = \frac{P}{\sqrt{EI_z GI_T}}, \quad (2.207)$$

aus denen abzuleiten ist, dass auch hier nur 2 unabhängige Koeffizienten, A_0 und A_1 , für die Beschreibung der Verdrillung

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \\ &= A_0 \left(1 - \frac{r^2}{2!} x^2 + \frac{r^4 - (1 \cdot 2) u^4}{4!} x^4 - \frac{r^6 - (1 \cdot 2 + 3 \cdot 4) r^2 u^4}{8!} x^6 + \right. \\ &\quad + \frac{r^8 - (1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6) r^4 u^4 + (1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6) u^8}{12!} x^8 - \\ &\quad \left. - \frac{r^{10} - (2 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8) r^6 u^4 + (2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8) r^2 u^8}{10!} x^{10} + \dots - \right) \\ &+ A_1 \left(x - \frac{r^2}{3!} x^3 + \frac{r^4 - (2 \cdot 3) u^4}{5!} x^5 - \frac{r^6 - (2 \cdot 3 + 4 \cdot 5) r^2 u^4}{7!} x^7 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^8 - (2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7) r^4 u^4 + (2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7) u^8}{9!} x^9 - \dots + \dots \right) = \\ &= A_0 \cdot R_1(x) + A_1 \cdot R_2(x) \end{aligned} \quad (2.208)$$

notwendig sind. Analog zum rechteckigen, einseitig eingespannten Biegestab ohne Normalkraftbeanspruchung können auch hier die Verschiebung in y-Richtung

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{GI_T}{P} \left[A_0 \left(-r^2 x \cdot \ln(x) + r^2 x - \frac{r^2 - (1 \cdot 2) u^4}{2 \cdot 3!} x^3 + \frac{r^3 - (1 \cdot 2 + 3 \cdot 4) r u^2}{4 \cdot 5!} x^5 - \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^4 - (1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6) r^2 u^2 + (1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6) r^4}{6 \cdot 7!} x^7 + \dots - \dots \right) \\ &\quad + A_1 \left(-\frac{r^2}{2!} + \frac{r^2 - (2 \cdot 3) u^2}{3 \cdot 4!} x^4 - \frac{r^3 - (2 \cdot 3 + 4 \cdot 5) r u^2}{5 \cdot 6!} x^6 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^4 - (2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7) r^2 u^2 + (2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7) u^4}{7 \cdot 8!} x^8 - \dots + \dots \right) \\ &\quad \left. + A_2 x + A_3 \right] \end{aligned} \quad (2.209)$$

und über die Randbedingungen

$$\vartheta(x=0) = \vartheta_0 \quad (2.210)$$

$$v(x=0) = v_0 \quad (2.211)$$

$$v'(x=0) = v'_0 \quad (2.212)$$

sowie mit Hilfe der Tatsache (siehe z.B. Papula [54])

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln(x)) = 0 \quad (2.213)$$

die Koeffizienten

$$A_0 = \vartheta_0 \quad (2.214)$$

$$A_1 = -\frac{P}{GI_T} v_0 \quad (2.215)$$

$$A_3 = -A_1 \quad (2.216)$$

ermittelt werden. A_2 ist nicht ohne größeren mathematischen Aufwand zu bestimmen, weshalb auch hier die Verschiebung in y-Richtung nicht endgültig beschrieben werden kann. Zur Lösung des Problems ist die genaue Beschreibung der Verschiebung jedoch gar nicht notwendig und kann daher vernachlässigt werden. Vielmehr ist für die Lösung des Stabilitätsproblems die Randbedingung der Verdrillung

$$\vartheta(x=\ell) = 0 = \vartheta_0 \cdot R_1(x=\ell) + v_0 \cdot \frac{Px}{GI_T} \cdot R_2(x=\ell) \quad (2.217)$$

zu nutzen. Wie schon in Kapitel 2.2.6 ist die Bedingung genau dann erfüllt wenn

$$R_1(x=\ell) = 0 = \left(1 - \frac{r^2}{2!} \ell^2 + \frac{r^4 - (1 \cdot 2) u^4}{4!} \ell^4 - \frac{r^6 - (1 \cdot 2 + 3 \cdot 4) r^2 u^4}{8!} \ell^6 + \dots - \dots \right), \quad (2.218)$$

gilt. Diese Bedingung kann nur dann erfüllt werden, wenn die beiden Parameter r und u in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Gelöst werden kann die Gleichung also durch Einsetzen des einen Wertes und Ermittlung des zugehörigen anderen Wertes. Inhaltlich steht der Parameter r für den Anteil der Normalkraft und u für den Anteil der Einzellast P bzw. des daraus entstehenden Moments. Es ist möglich, die kritische Last P_{crit} bzw. das daraus resultierende kritische Moment M_{crit} in Abhängigkeit vom Ausnutzungsgrad N/N_{crit} darzustellen. Am Beispiel $N/N_{crit} = 0,5$ wird die Vorgehensweise kurz erläutert. Für den Ausnutzungsgrad $\alpha_N = 0,5$ ergibt sich mit

$$N_{crit} = \frac{EI_z \pi^2}{4\ell^2} \quad (2.219)$$

des einseitig eingespannten Stabs, des Eulerstabs I, der Substitutionswert

$$r^2 = \frac{N}{EI_z} = \frac{N \cdot \pi^2}{4 \cdot N_{crit}} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (2.220)$$

Nach Einsetzen des Substitutionswerts in Gl. (2.218) wird diese genau dann erfüllt, wenn $\frac{u^2}{\ell^2} = 2,94$ ist. Daraus folgt die kritische Last

$$P_{crit} = \frac{u^2}{\ell^2} \sqrt{GI_T \cdot EI_z} = \frac{2,94}{\ell^2} \sqrt{GI_T \cdot EI_z}. \quad (2.221)$$

Jetzt kann überprüft werden, ob das sich daraus ergebende kritische Moment $P_{crit} \cdot \ell = \frac{2,94}{\ell} \sqrt{GI_T EI_z}$ näherungsweise gleich dem kritischen Moment nach Gl. (2.188) ist, wenn für die kritische Normalkraft die des Kragarms (Eulerstab I, Gl. (2.219)), oder anders formuliert die Knick-Ersatzstablänge des Kragarms ($\ell_{c,ef} = 2 \cdot \ell$), sowie die Kipp-Ersatzstablänge nach Gl. (2.182) eingesetzt werden. Das kritische Moment mit den Ersatzstablängen

$$M_{crit} = \frac{\pi}{\ell_{m,ef}} \sqrt{GI_T \cdot EI_z \left(1 - \frac{N}{N_{crit}}\right)} = \frac{4,0126}{\ell} \sqrt{GI_T \cdot EI_z (1 - 0,5)} = \frac{2,84}{\ell} \sqrt{GI_T \cdot EI_z} \quad (2.222)$$

liegt sehr nahe bei dem kritischen Moment, das durch die Reihenentwicklung ermittelt wurde. Im Zuge dieser Untersuchung ist das kritische Moment nach beiden dargestellten Methoden für mehrere Ausnutzungsgrade zwischen 0 und 1 ermittelt worden. Im Bild 2.15 sind die Ergebnisse in Abhängigkeit vom Ausnutzungsgrad α_N dargestellt. Es zeigt sich, dass beide Methoden in guter Näherung gleiche Ergebnisse liefern.

Der letzte Beweis dieser Theorie kann im Rahmen dieser Arbeit nicht erbracht werden, doch es liegt nahe, dass das kritische Moment für Modelle, die vom Kipp-Ersatzstab abweichen, beim Biegedrillknicken durch eine Kombination der Ersatzstablängen aus Knicken und Kippen ermittelt werden kann. Mit den Bezeichnungen

$\ell_{m,ef}$ = Kipp-Ersatzstablänge
 $\ell_{c,ef}$ = Knick-Ersatzstablänge,

wobei die Knick-Ersatzstablänge durch

$$\ell_{c,ef} = \pi \cdot \sqrt{\frac{N_{crit,d}}{EI_z}} \quad (2.223)$$

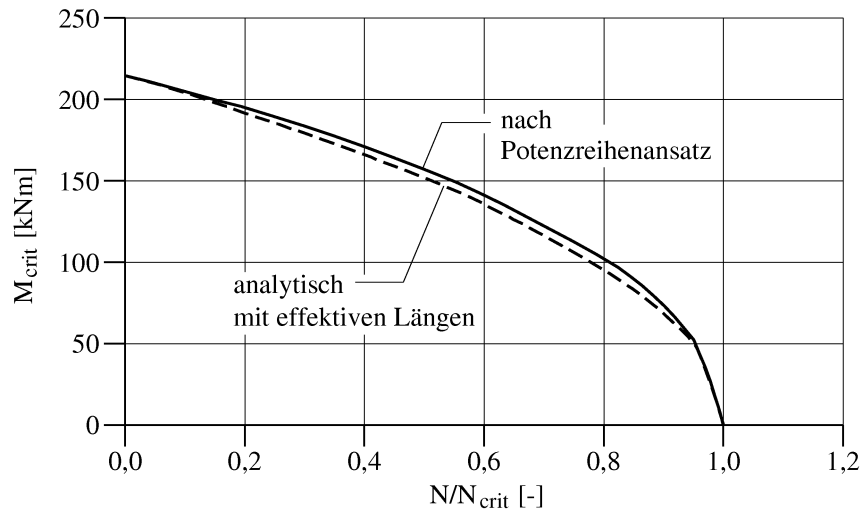


Bild 2.15: $M_{crit} - N_{crit}$ -Interaktionsdiagramm nach Potenzreihenansatz und mit Ersatzstablängen

für eine vorhandene kritische Last von $N_{crit,d}$ berechnet wird, ergibt sich die Gleichung für das kritische Moment beim Biegedrillknicken allgemein zu

$$M_{crit} = \frac{\pi}{\ell_{m,ef}} \sqrt{GI_T \cdot EI_z \left(1 - \frac{N_x \cdot \ell_{c,ef}^2}{EI_z \pi^2} \right)} = \frac{\pi}{\ell_{m,ef}} \sqrt{GI_T \cdot EI_z \left(1 - \frac{N_x}{N_{crit}} \right)}. \quad (2.224)$$

3 Der Baustoff Holz

3.1 Eigenschaften des Baustoffs Holz

3.1.1 Allgemeines

Holz ist im Gegensatz zu den meisten anderen Baustoffen ein natürlicher, nachwachsender Rohstoff. Die Struktur des Holzes wird durch Wachstumsbedingungen und verschiedene Umwelteinflüsse stark beeinflusst. Daher weist Holz eine große Streuung in den Materialeigenschaften auf. Die ideale Holzstruktur und die wachstumsbedingten Einflüsse werden in den folgenden Kapitel genauer dargestellt.

Als Bauholz werden im Allgemeinen die Nadelhölzer Fichte, Tanne, Lärche, Douglasie und Kiefer sowie das Laubholz Eiche verwendet. Diese werden entweder als Vollholz oder als Brettschichtholz eingesetzt. Vollhölzer werden aus dem ganzen Stamm geschnitten und sind daher in ihren Abmessungen stark eingeschränkt. Brettschichthölzer werden aus übereinander verleimten Brettlamellen hergestellt, die vorher in Längsrichtung durch Keilzinkenverbindungen verbunden wurden. Theoretisch können Brettschichthölzer in unendlichen Abmessungen hergestellt werden. Länge, Höhe und Breite werden jedoch durch die Produktions- und Transportmöglichkeiten begrenzt.

Für die in dieser Arbeit untersuchten kipp- und biegedrillknickgefährdeten Biegestäbe wird überwiegend Brettschichtholz, selten Vollholz, aus Fichte, Tanne oder Kiefer verwendet. Im Weiteren wird deshalb nur das Materialverhalten von Voll- und Brettschichthölzern aus Nadelholz dargestellt. Wenn von Bauholz die Rede ist, sind eben solche Hölzer gemeint.

Im Rahmen dieser Arbeit kann nur eine Beschreibung der Aspekte des Baustoffs Holz erfolgen, die für das zu untersuchende Problem, den biegedrillknickgefährdeten Biegestab, von Bedeutung sind. Für den geneigten Leser sei an dieser Stelle auf einige wichtige Veröffentlichungen verwiesen, die sich jeweils mit bestimmten Eigenschaften des Baustoffs Holz genauer befassen:

- Kollmann, 1951 [43] beschreibt umfassend und als erster in dieser Ausführlichkeit die Technologie des Holzes,
- Wagenführ, 1966 [68], Kürschner, 1966 [44] und Niemz, 1993 [53] beschreiben das Holz in der Schriftenreihe aus dem Blickwinkel verschiedener naturwissenschaftlicher Standpunkte,
- Glos, 1978 [30] und 1981 [31] beschreibt das Festigkeitsverhalten von Bauholz,
- Neuhaus, 1981 [52] untersucht die Elastizität von Fichtenholz in Abhängigkeit von der Holzfeuchte,

- Hemmer, 1985 [34] befasst sich mit Versagensarten von Weißtannenholz unter mehrachsiger Belastung,
- Ehlbeck und Blass, 1984 [26] sowie Blass, 1987 [10] beschreiben die Holzeigenschaften, die die Tragfähigkeit von Druckstäben aus Brettschichtholz beeinflussen, und entwickeln ein stochastisches Modell,
- Rautenstrauch [59] untersucht das Kriechverhalten von Biegeträgern aus Bauholz,
- Colling, 1990 [24] beschreibt die Tragfähigkeitseigenschaften von Biegeträgern aus Brettschichtholz,
- Burger, 1998 [16] befasst sich mit dem Einfluss der Abmessungen auf die Zugfestigkeit von Bauholz.

3.1.2 Strukturelle Eigenschaften von Bauholz

Holz ist ein natürlicher, organischer, hochpolymerer Stoff. Das natürliche Wachstum bildet einen für den Baum an die Umwelteinflüsse angepassten idealen Aufbau. Durch den Einschnitt zu Bauholz wird dieser ideale Aufbau teilweise zerstört. Der Aufbau von Bauholz kann daher durch eine für das Bauholz ideale Struktur mit Störungen beschrieben werden. Im Folgenden werden die für das Bauholz ideale Struktur sowie die verschiedenen Störungen dieser Struktur kurz beschrieben.

3.1.2.1 Die ideale Bauholzstruktur

Der Rohstoff Holz besteht aus röhrenförmigen Zellkörpern, Tracheiden genannt, die parallel zur Baumstammachse verlaufen. Untereinander werden die Tracheiden durch die Bindemittel Lignin und Hemicellulose verbunden. In ihrer Achsrichtung haben die röhrenförmigen Tracheiden eine hohe Tragfähigkeit. Senkrecht dazu ist die Tragfähigkeit geringer. Auf Druck werden die Röhrchen platt gedrückt, auf Zug ist die Festigkeit durch die Eigenschaften der Bindemittel Lignin und Hemicellulose begrenzt.

Aus dem strukturellen Aufbau folgt, dass Holz ein poröses, anisotropes Verbundmaterial ist, das in drei Richtungen, axial, radial und tangential, ein unterschiedliches Materialverhalten aufweist (rhombisch orthotrope Anisotropie). Dabei unterscheidet sich das axiale Tragverhalten deutlich von dem radialen und dem tangentialen Verhalten. Letztere können beim eingeschnittenen Holz nur noch schwerlich auseinandergehalten werden, so dass beim Bauholz keine radiale und tangentiale Richtung unterschieden, sondern nur von einem Tragverhalten parallel und senkrecht zum Faserverlauf des Holzes gesprochen wird. Mit dem Faserverlauf ist dabei die Achsrichtung der röhrenförmigen Tracheiden gemeint. Die ideale Bauholzstruktur ist durch einen an jeder Stelle zur Bauteilachse parallelen Faserverlauf gekennzeichnet.

3.1.2.2 Abweichungen von der idealen Struktur

Die tatsächliche Bauholzstruktur weicht von der idealen Bauholzstruktur ab. Die wichtigsten Ursachen dafür sind:

- **Ästigkeit:** Äste wachsen aus dem Stamm heraus und sind zwecks Versorgung mit der Markröhre in der Mitte des Hauptstammes verbunden. Die Fasern des Astes verlaufen in Achsrichtung des Astes, also leicht bis stark schräg nach oben geneigt, d.h. sie weisen einen mittleren bis großen, nahezu rechten Winkel zur Achse des Stammes auf. Die Fasern des Stammes wachsen um den Ast herum, so dass am Ast sowie in seinem Umgebungsbereich die Faserrichtung in diversen Richtungen vom für das Bauholz idealen Verlauf abweicht.
- **Jahrringe:** Innerhalb eines Jahres baut der Baum unterschiedlich schnell eine neue Schicht aus Holzfasern auf. Die Frühholzringe des Nadelbaums wachsen sehr schnell und haben eine geringere Rohdichte. Die Spätholzringe wachsen langsamer und weisen eine dichtere Struktur auf. Auch ist der Wuchs aufgrund von Wetter- und Klimabedingungen verschieden, so dass über den gesamten Stamm eine stark inhomogene Dichteverteilung der Fasern vorhanden ist.
- **Splint- und Kernholz:** Das äußere, jüngere Holz eines Baumstammes weist eine andere chemische Zusammensetzung auf als das ältere Kernholz.
- **Juveniles Holz:** In den ersten Jahren produziert ein Baum Fasern mit anderen Eigenschaften und geringerer Dichte als in späteren Jahren.
- **Reaktionsholz:** Aufgrund von äußeren Kräften, die auf den wachsenden Baum einwirken, bildet Nadelholz als Reaktion in stark druckbeanspruchten Bereichen Druckholz aus. Dieses Holz zeichnet sich durch breitere Jahrringe und einen höheren Anteil von Spätholz aus.
- **Drehwuchs:** Bäume sind häufig drehwüchsig, daher ist der Faserverlauf eines Baumstamms oft leicht spiralförmig.
- **Krummschaftigkeit:** Bäume wachsen nie gänzlich gerade. Der Faserverlauf folgt der Krümmung des Baumstammes.
- **Abholzigkeit:** Je nach Holzart nimmt der Stammdurchmesser stärker oder schwächer vom Wurzelstock zum Zopf ab. Dementsprechend sind die Fasern des Stammes geneigt.

3.1.2.3 Die tatsächliche Struktur von Bauholz

Durch das Einschneiden der Baumstämme zu Kantholz wird Bauholz produziert. Die aufgrund von Ästen, Drehwuchs, Krummschaftigkeit und Abholzigkeit ursprünglich im Stamm durchlaufenden, aber geneigten Fasern werden beim Einschnitt zum Teil durchtrennt. D.h. zu der Inhomogenität der Rohdichte des Holzes (Splint-, Kern- und Reaktionsholz, Jahrringe und juveniles Holz) und der Ästigkeit sowie der Faserneigung, die für

den nicht eingeschnittenen Baumstamm optimales Tragverhalten ermöglichen, nach dem Einschnitt aber Störungen des Bauholzes sind, kommen noch die aus dem Kantholz herauslaufenden Faserstränge als Störung der idealen Bauholzstruktur hinzu. Eine genauere Beschreibung der Veränderung der Holzstruktur beim Einschneiden gibt Kessel in [39] im Kapitel 'Holz als Baustoff' an.

Die Struktur von Bauholz ist also gekennzeichnet durch zur Stabachse eigentlich parallel verlaufende Faserstränge, deren Verläufe im Einzelnen leicht bis stark von der Parallelität abweichen und zum Teil aus dem Stab herauslaufen. Außerdem weist Bauholz eine stark variierende Rohdichte nicht nur innerhalb eines Kantholzes, sondern auch von Kantholz zu Kantholz auf. Dies ist zu beachten, da die Rohdichte mit der Festigkeit des Holzes stark korreliert. Hinzu kommen die Äste, die eine Art Unstetigkeitsstelle im Kantholz darstellen können, da die Faserrichtung der Äste und des Holzes um den Bereich der Äste unterschiedlich stark von der Richtung der Stabachse abweichen.

3.1.3 Holzfeuchte

Holz ist in hohem Maße hygroskopisch. D.h. es nimmt bei hoher umgebender Luftfeuchte Wasser in die Struktur auf, gibt sie bei niedriger umgebender Luftfeuchte wieder ab. Dies hat einen starken Einfluss auf das Volumen des Holzes: bei Feuchtaufnahme quillt das Holz, bei Abnahme der Feuchtigkeit schwindet es wieder. Da Holz radial und tangential stark unterschiedlich quillt bzw. schwindet, kommt es im Holz bei großen Feuchtigkeitsänderungen zu Eigenspannungen und, wenn die Spannungen die Querkzugfestigkeit beim Schwinden überschreiten, zu Rissen. Abhängig von der Trocknungsgeschwindigkeit kommt es zu zusätzlichen Spannungen wegen des Feuchtegefälles im Querschnitt. Das Risiko der Rissbildung bei der Trocknung von Holz kann durch einen sachgerechten Umgang beim Einschnitt (z.B. indem kleine Querschnitte im Vergleich zum Stammdurchmesser eingeschnitten werden), bei der Lagerung und der Trocknungsgeschwindigkeit verringert werden. Ganz ausgeschlossen werden kann es jedoch nicht. Gerissenes Holz kann jedoch während oder nach der Trocknung aussortiert werden. Wird Bauholz vor dem Einbau durch technische Trocknung an die am Einbauort vorherrschenden Bedingungen (Luftfeuchtigkeit) angepasst und treten im Gebrauch keine größeren Feuchtigkeitsschwankungen in der Umgebung auf, werden sich keine zusätzlichen trockenungsbedingten Schwindrisse ausbilden.

Neben dem Volumen ändern sich mit der Holzfeuchtigkeit auch die mechanischen Eigenschaften des Holzes. Die Steifigkeit und die Festigkeit des Holzes nehmen mit zunehmender Holzfeuchtigkeit ab und umgekehrt (Kufner, 1978 [45], Neuhaus, 1981 [52]).

3.2 Baustoff Holz im mechanischen Modell

3.2.1 Das allgemeine Last-Verformungs-Verhalten von Holz

Die strukturellen Eigenschaften von Holz unterliegen, wie aus dem vorangegangenen Kapitel Kap. 3.1 hervorgeht, einer starken Streuung. Die für den ingenieurmäßigen Umgang relevanten mechanischen Eigenschaften wie Festigkeiten und Steifigkeiten sind direkt von der Holzstruktur abhängig und weisen daher eine ebenso große Streuung auf, die vergleichbar ist mit der von Beton. Wie bei anderen Baustoffen (z.B. Stahl, Beton) auch, können Vorhersagen über das mechanische Verhalten von Holz unter einer bestimmten Beanspruchung nur auf der Basis wahrscheinlichkeitstheoretischer Berechnungen getroffen werden.

Grundsätzlich kann das Verhalten von Holz bei üblicher Verwendung als Bauholz für Druck- und Biegestäbe in drei Kategorien unterteilt werden. In das Verhalten unter Zug- und Druckbeanspruchung parallel und senkrecht zur Faser sowie unter Schubbeanspruchung. Wesentlich für die Bemessung von kippgefährdeten Biegestäben ist dabei das Verhalten parallel zur Faser, da dies die Hauptbeanspruchungsrichtung eines auf Druck und Biegung beanspruchten Stabs ist. Schubbeanspruchungen aus Querkraft und Beanspruchungen senkrecht zur Faser sind beim Biegestab in der Nähe von Krafteinleitungspunkten von Bedeutung, also im Bereich von Auflagern, Anschlüssen und Einleitungspunkten von äußeren Lasten. Diese Problematik soll hier allerdings nicht weiter behandelt werden. Kippgefährdete Stäbe werden zusätzlich durch Torsion auf Schub in nicht vernachlässigbarem Maße beansprucht. Vor allem auch die Schubverformungen aus Torsion, die eine Verdrehung des Querschnitts um die Stabachse verursachen, sind für das Kippen von Bedeutung.

3.2.1.1 Das Last-Verformungs-Verhalten parallel zur Faser

Das Last-Verformungs-Verhalten von Holz parallel zur Faser auf Druck und auf Zug ist gekennzeichnet durch einen für beide Beanspruchungsarten identischen linear-elastischen Bereich und durch ein grundsätzlich verschiedenes Bruchverhalten.

Unter Druckbeanspruchung reagiert das Holz zunächst nahezu elastisch, bis die Fasern örtlich ausknicken. Dann schieben sich die ausgeknickten Fasern ineinander und es bildet sich unter großen Verformungen (wie in Bild 3.1 und Bild 3.3 dargestellt) in tangentialer Richtung eine in etwa 67° Grad zur Faserrichtung und in radialer Richtung eine in etwa 90° Grad zur Faserrichtung geneigte Abscherebene aus (siehe Poulsen 1998 [57]). Unter Zugbeanspruchung verhält sich Holz näherungsweise ideal-elastisch, bis die Fasern reißen.

Glos hat in seinen Arbeiten 1978 [30] und 1981 [31] das Last-Verformungs-Verhalten von Holz intensiv untersucht. Er fand heraus, dass sich grundsätzlich die beiden in Bild 3.2 dargestellten Arbeitslinien a und b einstellen. Im Allgemeinen stellt sich qualitativ

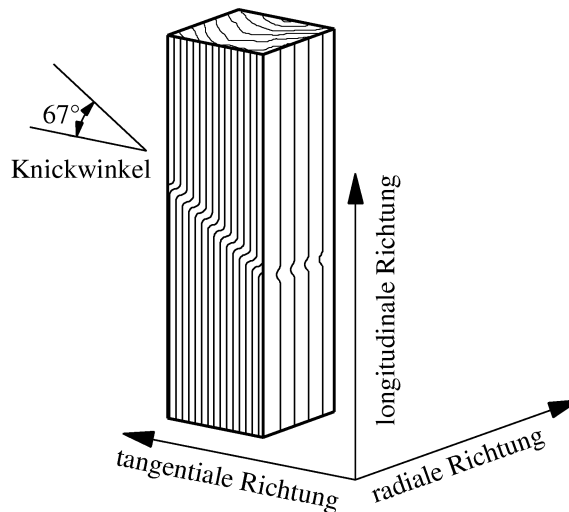


Bild 3.1: Geometrie des Faserknickens unter Druckbeanspruchung nach Poulsen

der durch Kurve a dargestellte Verlauf ein. Weist das Holz jedoch starke Störungen (z.B. durch Äste) auf, stellt sich qualitativ der durch Kurve b dargestellte Verlauf ein. Glos gibt für den Verlauf der Kurve a eine Gleichung an, die abhängig ist von den Kenngrößen Druckfestigkeit ($\sigma_{c,B}$), Druckelastizitätsmodul (E_d), Bruchdehnung ($\epsilon_{c,B}$) sowie asymptotische Druck-Endfestigkeit ($\sigma_{c,Ba}$).

Der Verlauf der von Glos ermittelten Arbeitslinie kann durch eine ideal-elastisch-plastische Last-Verformungs-Linie mit einer Fließspannung gleich der Druckfestigkeit $\sigma_{c,Ba}$ angenähert werden. Gegenüber der Kurve a liegt eine solche Annahme 'auf der sicheren Seite', da nicht das gesamte Arbeits-Potential genutzt wird. Gegenüber der Kurve b kann es zu leicht 'auf der unsicheren Seite' liegenden Ergebnissen kommen, da das Arbeits-Potential überschätzt werden könnte. Um dies zu verhindern, können die die elastisch-plastische Arbeitslinie beschreibenden Parameter (Kenngrößen), der E-Modul E_d als Maß der Steigung im elastischen Bereich und die Druckfestigkeit $\sigma_{c,Ba} = \sigma_{c,0}$ wahrscheinlichkeitstheoretisch angepasst werden, so dass eine Überschätzung des Materialverhaltens vermieden wird.

Für das Verhalten von Holz unter Zugbeanspruchung gibt Glos 1978 [30] und 1981 [31] einen ideal-elastischen Last-Verformungs-Verlauf bis zum Bruch an. Von Burger 1998 [16] werden drei Typen von Last-Verformungs-Kurven angegeben (siehe Bild 3.4). Typ A entspricht dem Vorschlag von Glos. Die Typen B und C beschreiben das Bruchverhalten unterschiedlicher Hölzer gut, sind jedoch als Grundlage für Berechnungen kaum geeignet. Zur weiteren Bearbeitung wird daher der Typ A verwendet. Die diese Arbeitslinie beschreibenden Parameter (Kenngrößen) E-Modul E_d und Zugfestigkeit $\sigma_{t,0}$ müssen ebenfalls wahrscheinlichkeitstheoretisch so angepasst werden, dass eine wirtschaftliche Bemessung auf der sicheren Seite möglich ist.

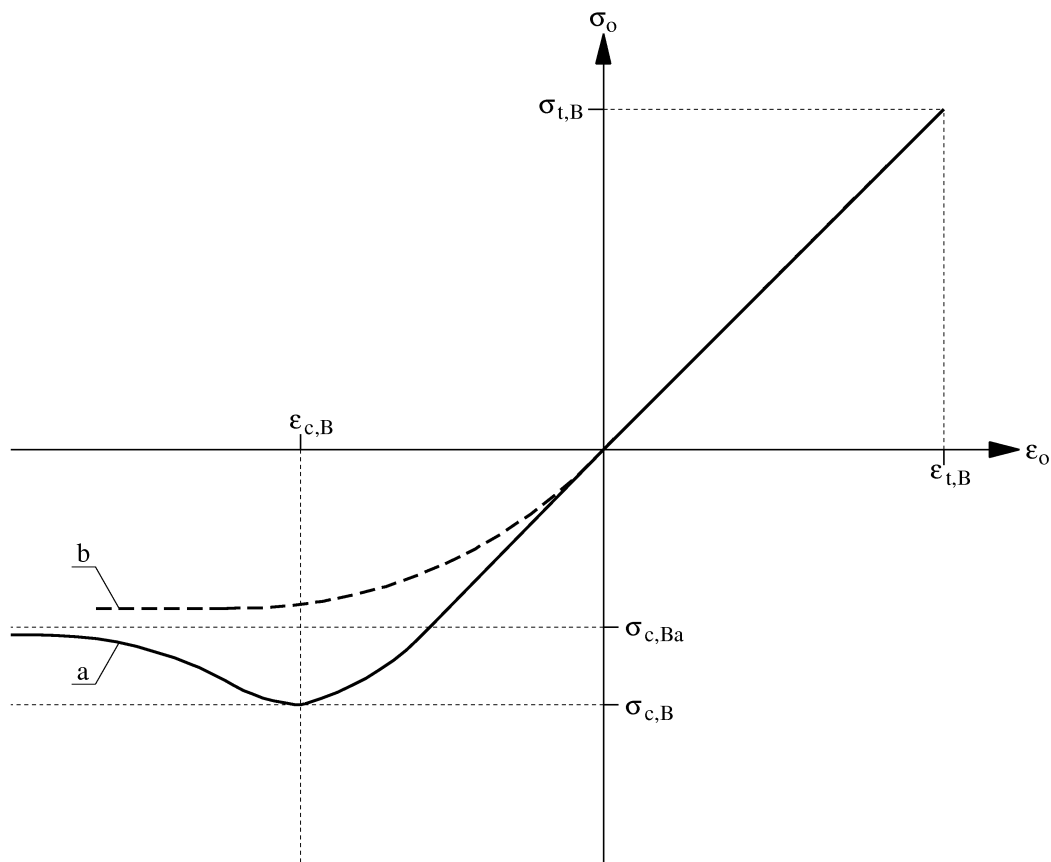


Bild 3.2: Arbeitslinie von Holz parallel zur Faser nach Glos

3.2.1.2 Das Last-Verformungs-Verhalten senkrecht zur Faser

Planmäßige Beanspruchungen senkrecht zur Faser sind, wie oben bereits erwähnt, beim Biegestab nur im Bereich von Krafteinleitungspunkten zu erwarten. Durch strukturelle Störungen im Holz wie Schrägfaserigkeit und Ästigkeit verlaufen die Fasern nicht immer parallel zur Achse der Stäbe, so dass es auch schräg zur Faser beansprucht wird.

Das Verhalten bei Erreichen bzw. Überschreiten der Festigkeit, also im postkritischen Bereich, ist senkrecht zur Faser ähnlich dem parallel zur Faser, allerdings wird eine wesentlich geringere Tragfähigkeit erreicht. Beim Überschreiten der Druckfestigkeit werden die einzelnen hohlen Faser-Röhrchen ineinander und letztlich platt gedrückt. Das Last-Verformungs-Verhalten ist auch hier elastisch-plastisch zu nennen. Mit Erreichen der Zugfestigkeit reißen die durch die Bindemittel (Lignin und Hemicellulose) miteinander verbundenen Fasern spröde auseinander.

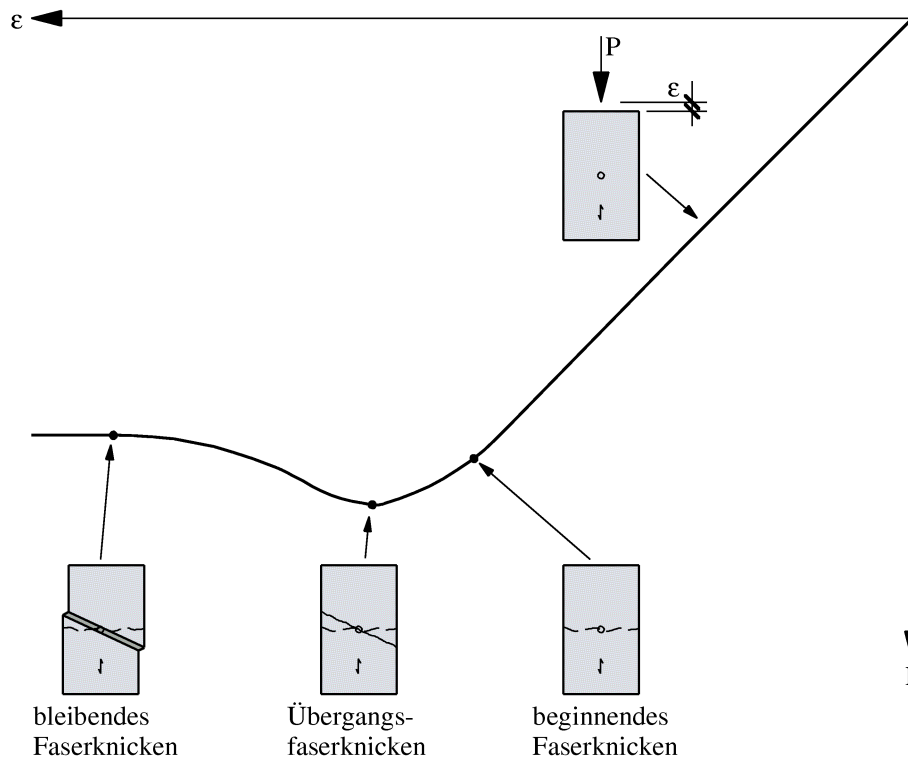


Bild 3.3: Stadien des Faserknickens im Last-Verformungs-Diagramm nach Poulsen

3.2.1.3 Das Last-Verformungs-Verhalten bei Schubbeanspruchung

Das Last-Verformungs-Verhalten von Holz kann, da es ein anisotroper Werkstoff ist, bei Schubbeanspruchung nicht allgemeingültig beschrieben werden. Möhler und Hemmer 1977 [50], Hemmer 1985 [34] und Eberhardsteiner 2002 [25] haben umfangreiche Untersuchungen des Tragverhaltens von Holz bei Schubbeanspruchung durchgeführt. Während Eberhardsteiner das Tragverhalten in verschiedenen Belastungsebenen untersucht, beschränken sich Möhler und Hemmer bei ihren Untersuchungen auf einzelne Belastungsebenen. Die Ergebnisse Eberhardsteiners zeigen, dass das Tragverhalten abhängig von der Belastungsebene von elastisch-spröde bis (näherungsweise) elastisch-plastisch variiert. Die konkreten Untersuchungen von Bauholz unter Torsionsbeanspruchung bei Möhler und Hemmer [50] belegen, dass die Last-Verdrehungs-Linien nahezu gradlinig bis zum Bruch verlaufen.

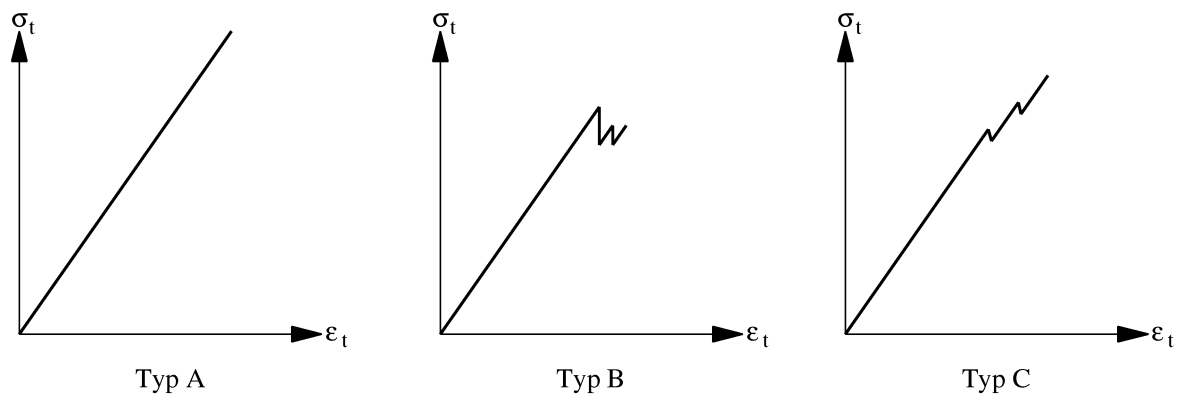


Bild 3.4: Mögliche Arbeitslinien von zugebeanspruchten Probekörpern nach Burger

3.2.2 Festigkeits- und Steifigkeitseigenschaften von Bauholz

Im vorangegangenen Kapitel Kap. 3.2.1 wurde das Last-Verformungs-Verhalten von Holz kurz dargestellt. Vereinfachend konnten zwei verschiedene Arbeitslinien festgelegt werden: die ideal-elastische Arbeitslinie mit sprödem Versagen bei Erreichen der Beanspruchbarkeit, bei Zug parallel und senkrecht zur Faser sowie bei Schub, und die ideal-elastisch-plastische Arbeitslinie, bei der das Versagen des Tragwerks gegebenenfalls durch übermäßige Verformung eintritt, wie bei Druck parallel und senkrecht zur Faser. Beiden Arbeitslinien ist gemein, dass sie durch nur zwei Kennwerte, Festigkeit und Steifigkeit, ausreichend beschrieben werden. Im Folgenden wird auf die Ermittlung der Größe dieser Kennwerte für die Bemessung eingegangen. Außerdem wird die Herleitung der für den Biegestab sehr wichtigen Biegefestigkeit beschrieben.

3.2.2.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden und Bemessung

Zur Ermittlung der Tragfähigkeit von Holzbauteilen ist die Kenntnis der Festigkeiten und Steifigkeiten des Baustoffs sowie deren statistische Verteilung grundlegend. Für die Herleitung der Bemessungskonzepte nach deutscher und europäischer Normung werden zwei wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden angewendet.

In EN 338:2003-09 werden Festigkeitsklassen für Vollholz und in EN 1194:1999-05 für Brettschichtholz definiert. Diesen Festigkeitsklassen sind charakteristische Werte für alle für die Bemessung relevanten Parameter (Festigkeiten, Steifigkeiten, Rohdichte) zugeordnet. Welche Grundgesamtheiten welcher Festigkeitsklasse zugeordnet werden dürfen, ist für Vollholz und Brettschichtholz unterschiedlich geregelt.

Vollholz wird in der Regel nach regional verschiedenen, vorgegebenen Sortierkriterien in sogenannte Sortierklassen sortiert. EN 338:2003-09 schreibt vor, dass die Kriterien für Sortierklassen nach den Anforderungen der prEN 14081-1 bis -3 festzulegen sind. Außerdem schreibt EN 338:2003-09 vor, dass die Kenngrößen Biegefestigkeit, Biege-

Elastizitätsmodul und Rohdichte einer Grundgesamtheit, also z.B. einer Sortierklasse, nach EN 384:2001-02 zu prüfen und zu ermitteln sind. Für die Biegefestigkeit und die Rohdichte werden (gegebenenfalls korrigierte) 5-Prozent-Quantilwerte und für den Biege-Elastizitätsmodul der Mittelwert der jeweiligen Probe bestimmt. Wenn diese drei Kenngrößen größer oder gleich den entsprechenden Werten einer Festigkeitsklasse sind, darf diese Grundgesamtheit dieser Festigkeitsklasse zugeordnet werden. Dabei wird angenommen, dass die übrigen Kennwerte der Grundgesamtheit in guter Näherung den Kennwerten der Festigkeitsklasse entsprechen.

Für Brettschichtholz werden Festigkeitsklassen in EN 1194:1999-05 geregelt. Um eine Grundgesamtheit von Brettschichtholz einer Festigkeitsklasse zuzuordnen, gibt es zwei Möglichkeiten.

Die eine Möglichkeit ist, die charakteristischen Werte der Biegefestigkeit und des Biege-Elastizitätsmoduls nach EN 408 und EN 1193 durch stichprobenartige Prüfung von Brettschichtholzstäben zu ermitteln. Charakteristische Werte sind nach EN 1990:2002 in der Regel bestimmte Fraktile, also z.B. der 5-Prozent-Quantilwert, einer statistischen Verteilung. Die Grundgesamtheit darf dann einer Festigkeitsklasse zugeordnet werden, wenn die beiden ermittelten charakteristischen Werte die entsprechenden Werte der Festigkeitsklasse nicht unterschreiten.

Die andere Möglichkeit ist, zunächst den charakteristischen Wert für die Zugfestigkeit und die Rohdichte sowie den mittleren Zug-Elastizitätsmodul der Lamellen zu ermitteln. Falls die Lamellen bereits einer Festigkeitsklasse nach EN 338 zugeordnet wurden, können die Kenngrößen dieser Festigkeitsklasse verwendet werden. Ansonsten sind die Kenngrößen durch Prüfung nach EN 408 und EN 384 zu bestimmen. Aus diesen Kenngrößen können dann alle relevanten Kenngrößen des Brettschichtholzes mit Hilfe von Gleichungen nach EN 1194 ermittelt, und damit den Festigkeitsklassen ebendieser Norm zugeordnet werden, wenn die ermittelten Kenngrößen diejenigen der Festigkeitsklasse nicht unterschreiten.

Es wird weiter angenommen, dass durch Einhaltung dieser Regelungen die charakteristischen Werte der Festigkeiten und der Rohdichte einer Festigkeitsklasse in etwa den 5-Prozent-Quantilwert der Grundgesamtheit aller Hölzer dieser Festigkeitsklasse repräsentieren. Für die Steifigkeiten werden Mittelwerte sowie Gleichungen zur Ermittlung der 5-Prozent-Quantilwerte angegeben.

Zur Bemessung eines Stabs aus Vollholz oder Brettschichtholz einer bestimmten Festigkeitsklasse wird der entsprechende charakteristische Wert einer Festigkeit durch den Teilsicherheitsbeiwert γ_M dividiert. Diese sogenannten Bemessungswerte der Beanspruchbarkeit werden dann den durch die Teilsicherheitsbeiwerte γ_F nach DIN 1055-100 erhöhten charakteristischen Beanspruchungen im Querschnitt eines Bauteils, den sogenannten Bemessungswerten der Beanspruchung, gegenübergestellt.

Bei der Herleitung des vereinfachten Nachweises für knickgefährdete Druckstäbe wird jedoch ein anderes wahrscheinlichkeitstheoretisches Konzept verwendet. Die Kenngrößen der Festigkeiten und Steifigkeiten wurden zur Untersuchung von verschiedenen Festigkeitsklassen erhoben und den einzelnen Elementen von Druckstäben nach der Monte-Carlo-Methode zugeordnet (siehe Ehlbeck und Blaß 1984 [26], Blaß 1987 [10] sowie Kessel, Haller und Bertolino 1992 [40]). Eine ausreichende Anzahl von auf diese Art generierten Druckstäben wurde dann nach der FE-Methode auf ihre Tragfähigkeit untersucht. Eine statistische Auswertung ergab die Gleichungen für den Beiwert k_c zur Ermittlung der Bauteiltragfähigkeit von Druckstäben, die im sogenannten Ersatzstabverfahren in DIN 1052:2005-08 angegeben sind. Dass beide Methoden zu sehr ähnlichen Ergebnissen führen, zeigt die Gegenüberstellung des Ersatzstabverfahrens mit der analytischen Bemessung von Druckstäben auf der Grundlage von DIN 1052:2005-08 von Kessel et al. 2005 [41]. Unter Vernachlässigung des Beiwertes k_{mod} , der in Kap. 3.2.3 näher erläutert wird, unterscheiden sich die Tragfähigkeiten, die nach den beiden Verfahren für Druckstäbe verschiedener Schlankheit ermittelt werden können, nur unwesentlich (Kap. 5.3).

3.2.2.2 Druck- und Zugfestigkeit von Bauholz

Die Tragfähigkeit von Holz nimmt sowohl auf Druck, als auch auf Zug bei zunehmendem Kraft-Faser-Winkel stark ab. Die Abnahme im Zugbereich ist wesentlich größer als im Druckbereich. Werte für Festigkeiten bei Druck- und Zugbeanspruchungen parallel und senkrecht zur Faser werden in der Literatur, z.B. schon bei Kollmann 1951 [43] oder auch bei Glos 1981 [31], und in der Normung, z.B. EN 338: 2003-09 oder EN 1194:1999-05, angegeben. Die Festigkeiten unter einem Winkel zur Faser können durch Näherungsgleichungen ermittelt werden.

Die Streuung der Druckfestigkeit unterscheidet sich stark von der der Zugfestigkeit. Dies wird z.B. an den in den Normen angegebenen Mittel- und 5-Prozent-Quantilwerten deutlich. In DIN 68364:2003-05 [3] sind die Mittelwerte für kleine, störungsfreie Proben angegeben. Die Probekörper für die Testreihen, die dieser Norm zu Grunde liegen, wurde bewusst so hergestellt, dass die Fasern randparallel verlaufen und sich keine Störungen des parallelen Faserverlaufs wie Äste im Probekörper befinden. Die Zugfestigkeit für Fichte parallel zur Faser ist in DIN 68364:2003-05 [3] mit $f_t = 95\text{N/mm}^2$ mehr als doppelt so groß wie die Druckfestigkeit mit $f_c = 45\text{N/mm}^2$. In EN 338:2003-09 [4] sind die 5-Prozent-Quantilwerte für die verschiedenen Nadelholz-Festigkeitsklassen angegeben. Diese Festigkeitsklassen repräsentieren Testreihen von Bauholz, das mit allen normalerweise vorkommenden Abweichungen von der idealen Struktur untersucht wurde. In der in Deutschland gängigsten Festigkeitsklasse C24 ist die Zugfestigkeit mit $f_t = 14\text{N/mm}^2$ nicht mehr doppelt so groß, sondern nimmt nur noch zwei Drittel des Wertes der Druckfestigkeit $f_c = 21\text{N/mm}^2$ an. In den niedrigeren Festigkeitsklassen, die Holz mit vielen Störungen repräsentieren, nimmt das Verhältnis von Zug- zu Druckfestigkeit weiter ab, während es in den höheren Festigkeitsklassen, die Holz mit wenigen Störungen der idealen Holzstruktur repräsentieren, ansteigt. Für die Festigkeitsklasse C45 werden

Druck- und Zugfestigkeit gleich groß angegeben ($f_t = f_c = 27 \text{ N/mm}^2$) und in der höchsten Festigkeitsklasse C50 nimmt die Zugfestigkeit einen größeren Wert als die Druckfestigkeit an. Daran wird deutlich, dass die Störungen im Holz einen wesentlich größeren Einfluss auf die Zug- als auf die Druckfestigkeit haben. Eine Erklärung ist, dass mit zunehmender Schrägfaserigkeit und Ästigkeit auch die Wahrscheinlichkeit zunimmt, dass ein eigentlich parallel zur Stabachse beanspruchter Stab unter einem großen Winkel zur Faser beansprucht wird. Und da die Festigkeit senkrecht zur Faser bei Zugbeanspruchung viel kleiner ist als bei Druckbeanspruchung, fällt die Festigkeit mit zunehmenden Störungen auch stärker ab.

Trotz der sehr unterschiedlichen Streuung der Festigkeitswerte unterliegen beide Festigkeiten der gleichen statistischen Verteilung. Nach Steiger 1996 [63] werden sowohl die Zug- als auch die Druckfestigkeit durch die Weibull-Verteilung, die von Weibull 1939 [69] erstmals hergeleitet wurde, ausreichend gut beschrieben. Mit der Weibull-Verteilung kann, bei Kenntnis der notwendigen Verteil-Parameter, für jeden Beanspruchungszustand eine Versagenswahrscheinlichkeit angegeben werden. Allerdings wird im allgemeinen nur bei der Zugfestigkeit die Änderung der Versagenswahrscheinlichkeit berücksichtigt, die sich bei verändernder Form der Zugbeanspruchung bzw. bei geändertem Zugbeanspruchungsbereich einstellt. Bei der Druckfestigkeit wird die Änderung der Versagenswahrscheinlichkeit aufgrund des gutmütigen, plastizierenden Versagens im allgemeinen vernachlässigt.

Burger [16] gibt 1998 für die Versagenswahrscheinlichkeit bei einer vorhandenen Zugspannung σ die Gleichung der Weibull-Verteilung

$$S(\sigma) = 1 - e^{-\int_V \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_M} \right)^k} \quad (3.1)$$

mit

σ_u = Ortsparameter (entspricht der Mindestfestigkeit des Materials)

σ_M = Maßstabsparameter (entspricht der Streuung der Verteilung)

k = Formparameter und

V = Volumen des Bauteils

an.

3.2.2.3 Biegefestigkeit von Bauholz

Die Biegefestigkeit von Bauholz ist eigentlich keine echte Materialeigenschaft. Sie ist ein Hilfswert, der aus den Druck- und Zugfestigkeiten unter Berücksichtigung der Spannungsverteilung über den Querschnitt parallel zur Faser konstruiert wird. Druck- und Zugversuche an Bauteilen mit realen Abmessungen sind wegen der grossen Kräfte, die in das Bauteil einzuleiten sind, sehr aufwendig. Dies gilt besonders für Zugversuche. Biegeversuche sind wesentlich einfacher und kostengünstiger durchzuführen. Daher werden in

DIN EN 384:2001-02 ([2]) Gleichungen angegeben, mit deren Hilfe zunächst die Biegefestigkeit

$$f_m = \sigma_m = \frac{M_{Bruch}}{W_B} \quad (3.2)$$

mit $W_B = b \cdot h^2 / 6$ stochastisch aus den Versuchsergebnissen ermittelt werden kann. Davon abhängig werden dann die Druck- und Zugfestigkeiten berechnet.

Die Biegefestigkeit setzt sich zusammen aus der Druck- und der Zugfestigkeit von Holz parallel zur Faser. Während bei Überschreiten der Festigkeit das Holz im Druckbereich plastische Verformungen aufweist, reißen im Zugbereich bei Erreichen der Festigkeit die Fasern und das Versagen des Querschnitts tritt ein. Die Zugfestigkeit ist jedoch abhängig von der Beanspruchungssituation. Die Versagenswahrscheinlichkeit von Holz bei einer bestimmten Beanspruchung wird durch Gl. (3.1) beschrieben. Colling beschreibt 1986 [23] den Einfluss des Volumens und der Spannungsverteilung auf die Festigkeit von Holzstäben unter Berücksichtigung von Gl. (3.1). Er zeigt dort, wie durch das Gleichsetzen der Versagens- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit von zwei verschiedenen Spannungsverteilungen über die Trägerlänge die anzunehmende charakteristische Festigkeit angepasst werden kann. Zur Bestimmung der Biegefestigkeit wird der Vierpunktversuch angewendet. Colling zeigt, wie die charakteristische Biegefestigkeit für andere Beanspruchungssituationen mit Hilfe der Weibull-Verteilung modifiziert werden kann.

Burger und Glos [15] beschreiben 1997 das Verhältnis von Zug- zu Biegefestigkeit durch die nicht dimensionsechte Gleichung

$$\frac{f_t}{f_m} = 0,24 \cdot f_m^{0,28}, \quad (3.3)$$

indem sie die verschiedenen Zugspannungsverteilungen über den Querschnitt und die verschiedenen Völligkeiten der Momentenlinie (4-Punkt-Versuch) bzw. der Normalkraft (Zugversuch) bei der Ermittlung der Festigkeiten im Versuch berücksichtigen. Die Gleichung ergibt dann sinnvolle Ergebnisse, wenn für die Festigkeiten die Einheit N/mm^2 eingestezt wird. Außerdem ermitteln Burger und Glos durch 2642 Zug- und 1739 Biegeversuche die unterschiedlichen Verteilparameter k in Gl. (3.1) für Biegung und Zug. Das Verhältnis der beiden Parameter, die sie k_t und k_m nennen, wird ebenfalls berücksichtigt. Es ist dafür verantwortlich, dass das Verhältnis f_t/f_m mit steigender Biegefestigkeit größer wird.

Auch bei der Druckfestigkeit gibt es eine Abweichung von der Biegefestigkeit. Im Allgemeinen ist die Druckfestigkeit kleiner als die angenommene Biegefestigkeit. Dass dennoch auch für die Biegung ein auf der sicheren Seite liegendes Ergebnis ermittelbar ist, liegt daran, dass Holz auf Druck ein plastisches Versagensverhalten aufweist. Wird die Druckfestigkeit im Druckbereich überschritten, bildet sich ein plastizierter Druckbereich

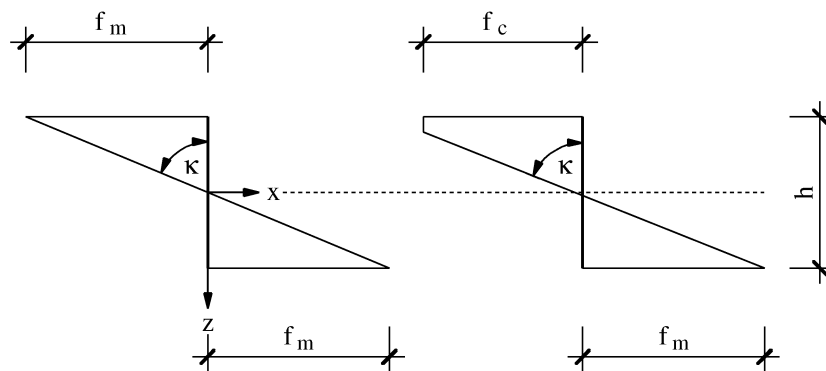


Bild 3.5: Spannungsverteilung bei Annahme rein elastischer (links) und bei Annahme elastisch-plastischer (rechts) Druckspannungen

aus, der weiterhin eine hohe Tragfähigkeit besitzt. In Bild 3.5 sind einerseits die nach Norm vereinfachend für die Bemessung angenommene Spannungsverteilung und andererseits, die, welche sich einstellt, wenn der Druckbereich plastiziert, bei gleich bleibender Biegezugfestigkeit, jeweils für reine Biegebeanspruchung von Vollholz der Festigkeitsklasse C24 dargestellt. Der Unterschied in den beiden Modellannahmen stellt sich durch eine stärkere Krümmung des plastizierenden Modells dar. Beim plastizierenden Modell ist also eine geringere Steifigkeit des Querschnitts anzunehmen. Allerdings ist erstens der Unterschied gering und zweitens wird die Steifigkeit durch die experimentelle Untersuchung des E-Moduls ermittelt, so dass sich keine Nachteile bei der Bemessung nach dem rein elastischen Modell mit erhöhten Biegedruckfestigkeiten ergeben.

In Bild 3.5 ist links die Spannungsverteilung bei Erreichen der Beanspruchbarkeit unter Annahme rein elastischer Biegespannungen für Druck und Zug dargestellt. Rechts ist die Spannungsverteilung bei Beanspruchung durch ein ebenso grosses Moment (wie links) unter Annahme einer geringeren Biege-Druckfestigkeit mit ideal-elastisch-plastischem Verhalten abgebildet. Beide Darstellungen sind maßstabsgerecht für die Festigkeitsklasse C24. Es wird deutlich, dass die Krümmung κ nur um ein sehr geringes Maß beim elastisch-plastischen Ansatz für den Druckbereich größer ist als beim ideal-elastischen Ansatz. Außerdem weicht die Verteilung der Zugspannungen über den Querschnitt bei elastisch-plastischem Ansatz nur unwesentlich von der Verteilung der Zugspannungen bei ideal-elastischem Ansatz ab.

3.2.2.4 Schubfestigkeit von Bauholz

In der Normung wird ähnlich wie beim Torsions-Schubmodul die Torsionsschubfestigkeit gleich der 'normalen' Schubfestigkeit angenommen. 1977 stellten Möhler und Hemmer umfangreiche Untersuchungen zur Schubfestigkeit von Bauholz an. Die Bemessung bei reiner Torsionsbeanspruchung erfolgt nach [50] in EN 1995:2005-12 bzw. DIN 1052:2004-08 mit der Bemessungsgleichung

$$\frac{\tau_{tor,d}}{f_{v,d}} \leq 1 \quad (3.4)$$

und bei Kombination von Schubbeanspruchungen aus Torsion und Querkraft nach [49] mit

$$\frac{\tau_{tor,d}}{f_{v,d}} + \left(\frac{\tau_{y,d}}{f_{v,d}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{z,d}}{f_{v,d}} \right)^2 \leq 1 \quad (3.5)$$

wobei $f_{v,d}$ der Bemessungswert der Schubfestigkeit ist.

Die Ergebnisse von Prüfungen zur Ermittlung der charakteristischen Schubfestigkeit hängen stark von der Form der Probe ab. Bei den üblichen Probenformen 'Würfel' und 'Kreuz' weichen die Ergebnisse etwa um den Faktor 1,35 voneinander ab [3]. Aufgrund neuerer Untersuchungen von Brüninghoff und Klapp [12] wurde festgestellt, dass die charakteristischen Schubfestigkeitswerte in der Normung zu hoch angenommen wurden. Für Brettschichtholz wird in dieser Arbeit $f_{v,k} = 2,7 \text{ N/mm}^2$ benutzt.

3.2.2.5 Elastizität von Bauholz

Holz ist ein anisotroper Werkstoff. Es kann also nicht wie ein isotroper Werkstoff durch einheitliche Werte für den Elastizitätsmodul (E), den Gleitmodul (G) und die Querdehnzahl (ν) beschrieben werden. Statt dessen gibt es insgesamt 9 Elastizitätszahlen, jeweils drei für den Elastizitätsmodul, den Gleitmodul und die Querdehnzahl. Bei ansonsten konstanten Umgebungsbedingungen gelten die Gleichungen

$$\epsilon_x = s_{11} \cdot \sigma_x + s_{12} \cdot \sigma_y + s_{13} \cdot \sigma_z \quad (3.6)$$

$$\epsilon_y = s_{21} \cdot \sigma_x + s_{22} \cdot \sigma_y + s_{23} \cdot \sigma_z \quad (3.7)$$

$$\epsilon_z = s_{31} \cdot \sigma_x + s_{32} \cdot \sigma_y + s_{33} \cdot \sigma_z \quad (3.8)$$

$$\gamma_{yz} = s_{44} \cdot \tau_{yz} \quad (3.9)$$

$$\gamma_{zx} = s_{55} \cdot \tau_{zx} \quad (3.10)$$

$$\gamma_{xy} = s_{66} \cdot \tau_{xy} \quad (3.11)$$

des Elastizitätsgesetzes für das rhombisch-anisotrope Materialmodell. Dabei gilt für die E-Moduln

$$E_x = \frac{1}{s_{11}} \quad (3.12)$$

$$E_y = \frac{1}{s_{22}} \quad (3.13)$$

$$E_z = \frac{1}{s_{33}} \quad (3.14)$$

und für die G-Moduln

$$G_{yz} = \frac{1}{s_{44}} \quad (3.15)$$

$$G_{zx} = \frac{1}{s_{55}} \quad (3.16)$$

$$G_{xy} = \frac{1}{s_{66}}. \quad (3.17)$$

Für die Querdehnzahlen lassen sich so einfache Beziehungen nicht angeben, sie sind jedoch abhängig von den Elastizitätszahlen s_{12} , s_{13} und s_{23} und den E-Moduln. Die Elastizitätszahlen von Fichtenholz hat Neuhaus 1981 [52] in Abhängigkeit von der Holzfeuchte intensiv untersucht. Die Ergebnisse für eine übliche Holzfeuchte von 20 Prozent zeigen, dass der E-Modul in Faserrichtung etwa den 20-fachen Wert der E-Moduln senkrecht zur Faser annimmt. Senkrecht zur Faser wird unterschieden in den etwa 1,5-fach größeren tangentialen E-Modul und den kleineren radialen E-Modul. Da bei Bauholz aber diese beiden Richtungen nicht auseinander zu halten sind, wird in der Normung ein gemittelter Wert angenommen.

Entsprechend der Arbeitslinie nach Glos für Beanspruchungen parallel zur Faser kann auch der E-Modul in Abhängigkeit von der Dehnung, wie in Bild 3.6, dargestellt werden. Bei der vereinfachten Annahme eines rein elastischen Verhaltens im Zugbereich und eines ideal-elastisch-plastischen Verhaltens im Druckbereich wird von einem im elastischen Bereich konstanten E-Modul, im plastischen Bereich von einem nicht Vorhandensein des E-Moduls ausgegangen.

Der Gleitmodul für die Querschnittsebene (yz) von Stäben aus Bauholz nimmt nach Neuhaus [52] etwa den Wert von einem Zwanzigstel des Werts der Gleitmoduli in den beiden anderen Ebenen (xy und xz), die untereinander nur eine geringe Abweichung aufweisen, an. Die Schubbeanspruchung in der Querschnittsebene von Holzstäben wird auch Rollschub genannt. In der Normung wird der zugehörige Roll-Schubmodul G_{yz} mit einem

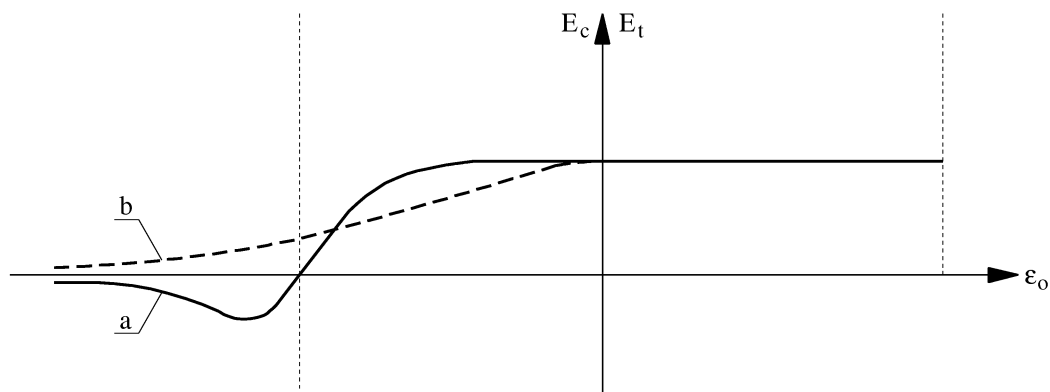


Bild 3.6: Elastizitätsmodul parallel zur Faser in Abhängigkeit von der Dehnung nach Glos

Zehntel des 'normalen' Schubmoduls, Mittelwert aus G_{xy} und G_{xz} , angesetzt. Für den kippgefährdeten Biegestab ist vor allem der Torsions-Schubmodul von Bedeutung, der sich, wie in Bild 3.7 leicht zu erkennen ist, durch

$$G_T = \frac{G_{xz} + G_{xy}}{2} \quad (3.18)$$

ermitteln lässt. Der Torsions-Schubmodul entspricht damit genau dem in der Normung als Schubmodul angegebenen Wert. In diesem Zusammenhang seien noch die Untersuchungen zum Verhalten von Bauholz von Möhler und Hemmer 1977 [50], Ewald und Lischke 1984 [28] sowie Scharf 1986 [61] genannt.

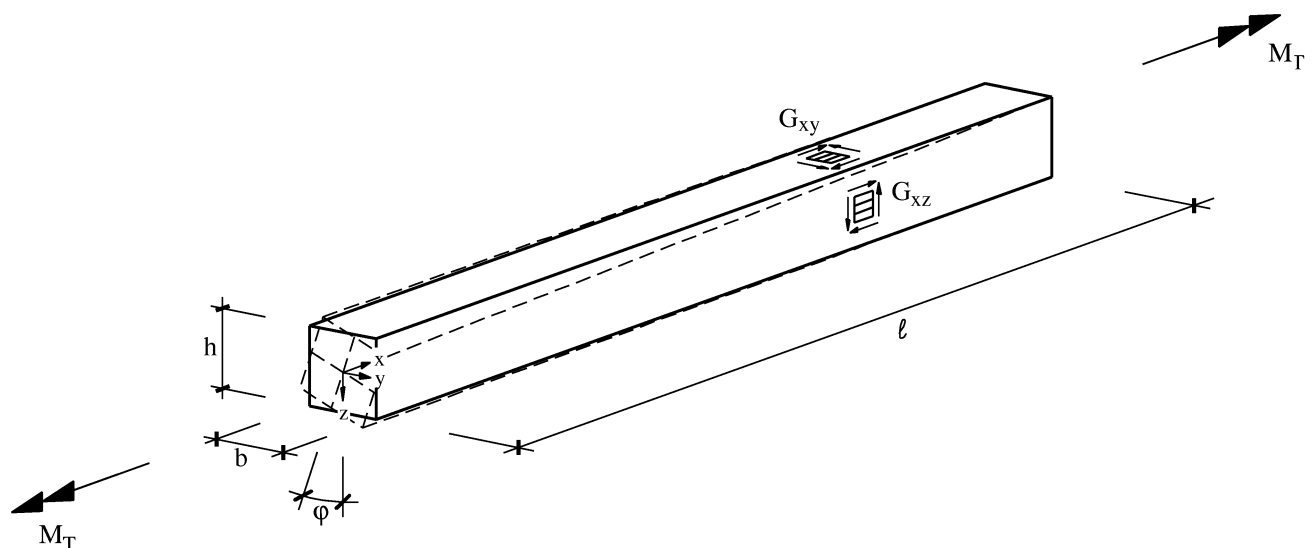


Bild 3.7: Darstellung der aktivierten Gleit-, bzw. Schubmodule bei Torsionsbeanspruchung nach Scharf [61]

3.2.3 Materialverhalten unter Langzeitbeanspruchung

Holz weist unter Langzeitbeanspruchung ein zeitabhängiges Materialverhalten auf. Dieses Verhalten wird auch als Kriechen bezeichnet. In Abhängigkeit von der Beanspruchungsart (Zug, Druck, Biegung, Schub, Torsion), dem Belastungsgrad, der Umgebungstemperatur, der Holzfeuchte und den Wuchseigenschaften des Holzes nimmt die Verformung mit ansteigender Belastungsdauer zu. Umfangreiche Untersuchungen des Kriechverhaltens von Holz und Holzwerkstoffen wurden unter anderem von Gressel 1984 [32] allgemein, Rautenstrauch 1989 [59] zum Verhalten von Biegeträgern und Benning 1997 [9] zum Verhalten bei Torsionsbeanspruchung durchgeführt.

Die Berücksichtigung der Kriechverformungen kann vereinfacht durch das Verfahren nach DIN 1052:2004-08 [5] Kapitel 8.3 erfolgen. Dort wird vorgeschlagen, die Steifigkeit von druckbeanspruchten Bauteilen mit einem Lastanteil ständiger Lasten von mehr als 70 Prozent durch den Faktor $1/(1 + k_{def})$ abzumindern. Eine Erweiterung dieser Methode auf kipppgefährdete Biegeträger ist in grober Näherung möglich. Es muss allerdings dabei berücksichtigt werden, dass die Kriechverformungen aus Torsionsbeanspruchung größer als die aus Biegebeanspruchung sind.

Eine genauere Methode ist die von Teichmann 2006 [64] vorgeschlagene. Durch Näherungslösungen lassen sich die Verformungen aus Kriechen hinreichend genau ermitteln. Diese können dann als zusätzliche Vorverformung für eine Bemessung berücksichtigt werden. Es ist zu erwarten, dass Frau Teichmann zu diesem Thema in nächster Zukunft eine Dissertation veröffentlichen wird.

Neben den Verformungen, die bei Langzeitbeanspruchung zunehmen, werden auch die Festigkeitseigenschaften beeinflusst. Die Festigkeiten nehmen bei Langzeitbeanspruchung ab. Diesem Zusammenhang wird in DIN 1052:2004-08 durch den Beiwert k_{mod} Rechnung getragen. Der Beiwert k_{mod} berücksichtigt neben der Dauer der Beanspruchung auch noch die klimatischen Umgebungsbedingungen, d.h. vor allem die Luftfeuchtigkeit der Umgebung des eingebauten Bauteils. Im Allgemeinen mindert der Beiwert k_{mod} die Festigkeiten ab. Bei sehr kurzen Beanspruchungen, hervorgerufen z.B. durch Anpralllasten, werden die Festigkeiten durch den Beiwert k_{mod} auch erhöht.

Bauwerke in Holzbauweise zeichnen sich im Allgemeinen dadurch aus, dass der Anteil des Eigengewichts an der Gesamtbelastung gering ist. In dieser Arbeit wird daher der Einfluss des Kriechens auf das Tragverhalten von kipppgefährdeten Biegestäben nicht genauer untersucht. Untersuchungen zum Langzeitrtragverhalten von durch Stabilitätsversagen gefährdeten Bauteilen werden z.b. bei Rautenstrauch 1992 [59], Benning 1997 [9], Schulte 1998 [62] und Becker 2002 [8] beschrieben.

4 Tragfähigkeit von Holzquerschnitten

4.1 Analytische Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit von rechteckigen Holzstäben

4.1.1 Allgemeines

Wesentlich für die Tragfähigkeit von Druck- und Biegestäben sind die Beanspruchungen parallel zur Faser. Die Längsspannungen werden durch eine Kombination aus Normalkraft und den Biegemomenten um die starke sowie um die schwache Achse des Querschnitts erzeugt. Die Querschnittstragfähigkeit gibt an, gegenüber welcher Kombination dieser drei Schnittgrößen der Querschnitt gerade noch Widerstand leisten kann, bevor er versagt.

Chen führt umfassende Untersuchungen der Querschnittstragfähigkeit von Materialien mit ideal-elastisch-plastischem Verhalten durch. Unter anderem in den Veröffentlichungen mit Santathadaporn 1969 [21] und mit Atsuta 1972 [18], 1973 [19] sowie 1976 [20] beschreibt er die Tragfähigkeit von Querschnitten aus Stahl und Mauerwerk sowie deren Auswirkung auf das Tragverhalten von knickgefährdeten Bauteilen. Sowohl Stahl als auch Mauerwerk weisen jedoch im Zugbereich ein grundsätzlich anderes Tragverhalten auf als Holz, so dass eine Übertragung der Ergebnisse auf Holz nicht möglich ist.

Kersken-Bradley [38] gibt 1981 eine theoretische Beschreibung der Querschnittstragfähigkeit auf der Grundlage statistischer Daten über das Festigkeitsverhalten von Prüfkörpern an. Experimentelle und theoretische Untersuchungen der Querschnittstragfähigkeit hat Buchanan 1984 durchgeführt und unter anderem in seiner Dissertation [14] dargestellt. Kersken-Bradley und Buchanan untersuchen dabei vor allem das ebene (zweidimensionale) Modell. Zweiachsige Biegung wird nur von Kersken-Bradley behandelt, dort aber auch nur am Rande.

Das von Glos beschriebene elastisch-plastische Materialverhalten von Holz im Druckbereich (siehe Kap. 3.2.1.1) lässt sich in guter Näherung durch die ideal-elastisch-plastische Arbeitslinie in Bild 4.1 beschreiben. Mit dieser Arbeitslinie wird hier zunächst die Querschnittstragfähigkeit ermittelt. Welchen Einfluss eine Veränderung der vereinfachten Arbeitslinie in Richtung der Kurven a und b in Bild 3.2 hat wird in Kap. 4.3.2 durch numerische Vergleichsrechnungen überprüft und erläutert.

4.1.2 Definition der Vorzeichen

Im vorherigen Kapitel werden im Gegensatz zur allgemeinen Konvention Druckkräfte als positiv und Zugkräfte als negativ definiert. Grund dafür ist, dass knick- und biegedrillknickgefährdete Bauteile im Allgemeinen durch Druckkräfte beansprucht werden. Zug-

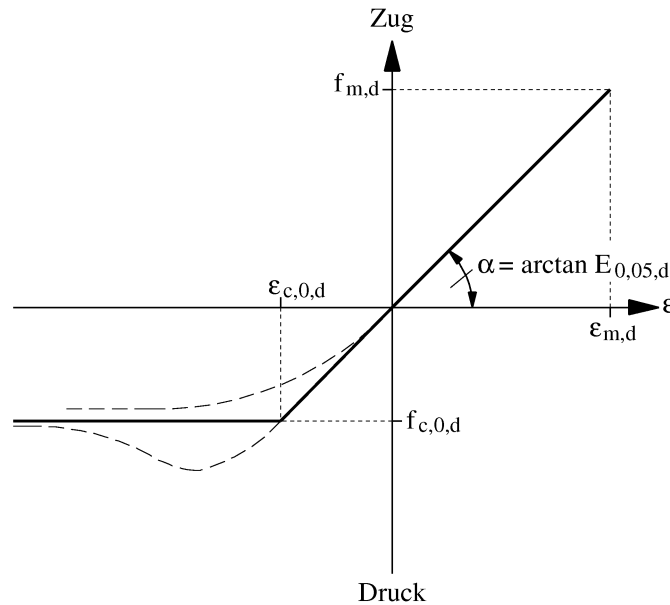


Bild 4.1: Vereinfachte Arbeitslinie zur Bemessung von Holzbauteilen

kräfte nehmen bei dieser Problematik eine untergeordnete Rolle ein.

Bei der in diesem Kapitel behandelten Problematik der Querschnittstragfähigkeit werden Druck- und Zugspannungen sowie Druck- und Zugdehnungen nach der herkömmlichen Methode definiert, d.h. Druckspannungen und -dehnungen sind negativ und Zugspannungen und -dehnungen sind positiv. Denn die Ergebnisse sind allgemein für den Holzbau gültig und betreffen nicht nur knick- bzw. biegedrillknickgefährdete Bauteile. Außerdem ist so auch eine Vergleichbarkeit mit z.B. den Ergebnissen von Chen und Atsuta [20] gewährleistet. Um Missverständnissen vorzubeugen, werden in allen Darstellungen Druck- und Zugbereiche deutlich gekennzeichnet.

4.1.3 Querschnittstragfähigkeit im ebenen Modell

Der besseren Nachvollziehbarkeit wegen wird zunächst die Querschnittstragfähigkeit eines rechteckigen Biegeträgers am ebenen Modell ermittelt. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Querschnitt nur eine Kombination aus Normalkraft und dem Moment um die starke Achse aufnehmen muss. Das Moment um die schwache Achse sei vernachlässigbar klein.

4.1.3.1 Einfluss des Plastizierens

Unter der Voraussetzung des Ebenbleibens des Querschnitts ist ein Modell für die Querschnittstragfähigkeit eines Biegeträgers abhängig von der Krümmung um die starke Achse κ_y , der maximal möglichen Randdehnung im Zugbereich ε_t und der Grenzdehnung

ε_c , bei der das Holz im Druckbereich vom elastischen zum plastischen Materialverhalten übergeht. Die Randdehnung im Druckbereich kann theoretisch unendlich groß werden. Inwieweit eine Begrenzung der Druckdehnung sinnvoll ist, wird in Kap. 4.3.2 untersucht. Zunächst wird hier davon ausgegangen, dass die Druckdehnung keiner Begrenzung unterliegt. Unter der Annahme, dass am Zugrand genau die Maximalzugdehnung ε_t erreicht ist, können für alle Krümmungen κ_y von Null bis Unendlich die jeweils von κ_y abhängigen aufnehmbaren Schnittgrößen N_x und M_y berechnet werden. Bei der theoretischen Krümmung $\kappa_y = \infty$ ist der Querschnitt vollständig überdrückt. In Bild 4.2 ist der Übergang vom vollständig überzogenen zum vollständig überdrückten Querschnitt in den relevanten Schritten dargestellt.

Der Dehnungsverlauf über die Höhe des ebenen Modells kann durch

$$\varepsilon(z) = \kappa_y \cdot \left(z - \frac{h}{2} \right) + \varepsilon_t \quad (4.1)$$

beschrieben werden. Der Spannungsverlauf lässt sich nicht durch eine stetige Funktion beschreiben. Allerdings kann mit Hilfe der Schreibweise des Föppel-Symbols

$$\langle X \rangle = \begin{cases} X & \text{für } X \geq 0 \\ 0 & \text{für } X < 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

die auch Chen und Atsuta 1976 [20] zur Beschreibung der Querschnittstragfähigkeit von Stahl verwenden, eine übersichtliche Formulierung in der Form

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= E \cdot [\varepsilon(z) + \langle -(\varepsilon(z) - \varepsilon_c) \rangle] = \\ &= E \cdot \left[\kappa_y \cdot \left(z - \frac{h}{2} \right) + \varepsilon_t + \left\langle - \left(\kappa_y \cdot \left(z - \frac{h}{2} \right) + \varepsilon_t - \varepsilon_c \right) \right\rangle \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

gefunden werden. Zur Ermittlung der Schnittgrößen muss die Spannungsverteilung in der Form

$$N_x = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(z) dz \quad \text{bzw.} \quad (4.4)$$

$$M_y = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cdot \sigma(z) dz \quad (4.5)$$

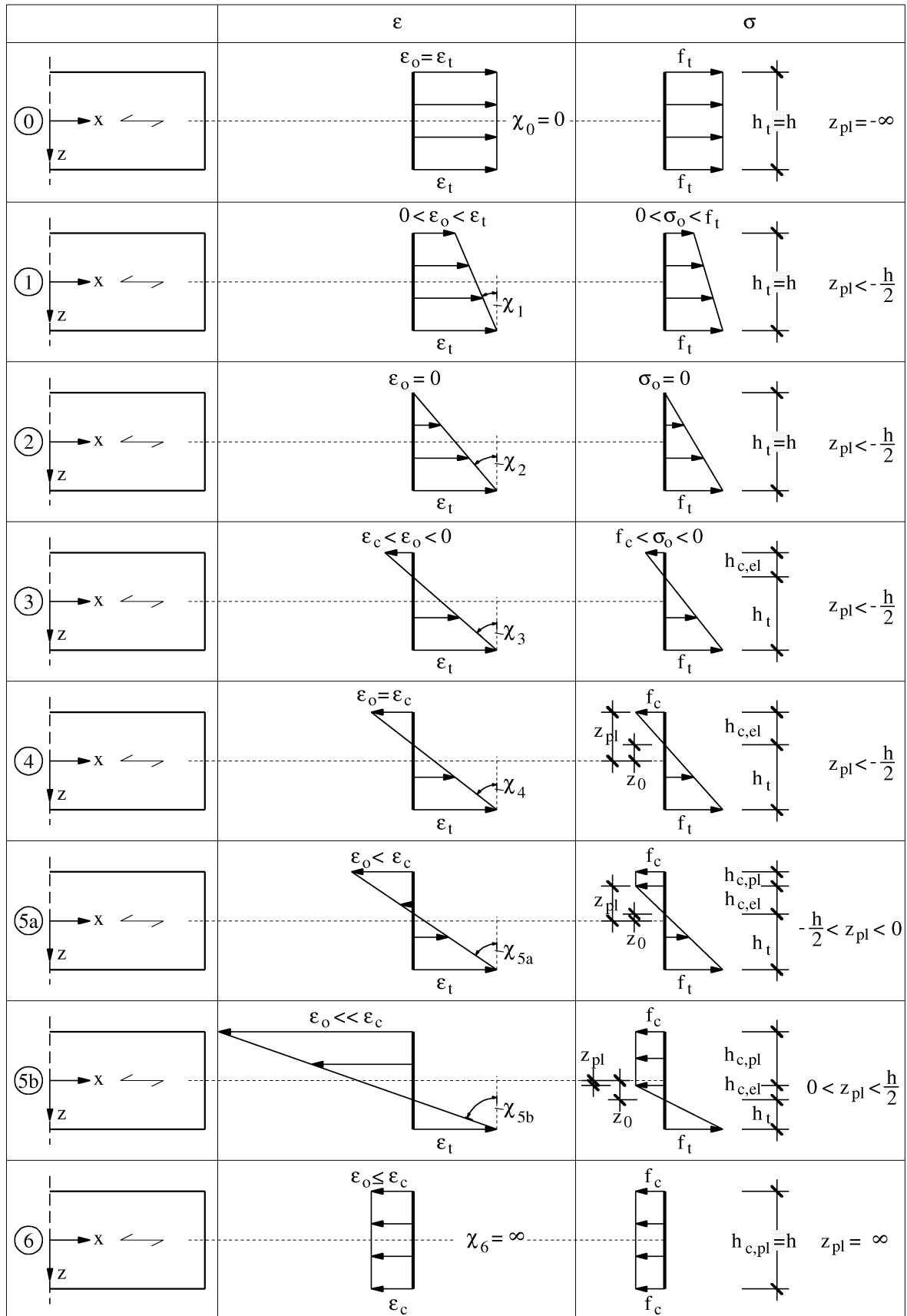


Bild 4.2: Spannungszustände infolge einer kombinierten Momenten-Normalkraftbeanspruchung

über die Höhe integriert werden. Für die konkrete Berechnung der Schnittgrößen bietet es sich an, zunächst wieder mit Fallunterscheidungen zu arbeiten. Für die Normalkraft ergibt sich die Gleichung

$$N_x = \begin{cases} E \cdot b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\kappa_y (z - \frac{h}{2}) + \varepsilon_t) dz & \text{für } z_{pl} \leq -\frac{h}{2} \\ E \cdot b \cdot \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\kappa_y (z - \frac{h}{2}) + \varepsilon_t) dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{z_{pl}} (\kappa_y (z - \frac{h}{2}) + \varepsilon_t - \varepsilon_c) dz \right] & \text{für } \frac{h}{2} > z_{pl} > -\frac{h}{2} \end{cases} \quad (4.6)$$

mit

$$z_{pl} = \frac{h}{2} - \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_c}{\kappa_y}. \quad (4.7)$$

Die Einschränkungen in Gl. (4.6) können auch in der Form

$$z_{pl} \leq -\frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad (\varepsilon_t - \varepsilon_c - \kappa_y \cdot h) \geq 0 \quad \text{und} \quad (4.8)$$

$$\frac{h}{2} > z_{pl} > -\frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad (\varepsilon_t - \varepsilon_c - \kappa_y \cdot h) < 0 \quad (4.9)$$

beschrieben werden. Dieser Zusammenhang ist hilfreich, um die Lösung der beiden Integrale

$$E \cdot b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\kappa_y \left(z - \frac{h}{2} \right) + \varepsilon_t \right) dz = E \cdot b \cdot h \cdot \left(\varepsilon_t - \frac{\kappa_y \cdot h}{2} \right) \quad \text{und} \quad (4.10)$$

$$E \cdot b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{z_{pl}} \left(\kappa_y \left(z - \frac{h}{2} \right) + \varepsilon_t - \varepsilon_c \right) dz = E \cdot b \cdot h \cdot \frac{-1}{2 \cdot \kappa_y \cdot h} \cdot (\varepsilon_t - \varepsilon_c - \kappa_y \cdot h)^2 \quad (4.11)$$

mit Hilfe des Föppel-Symbols zu

$$N = E \cdot A \cdot \left[\varepsilon_t - \frac{\kappa_y \cdot h}{2} - \frac{1}{2 \cdot \kappa_y \cdot h} \cdot \langle -(\varepsilon_t - \varepsilon_c - \kappa_y \cdot h) \rangle^2 \right] \quad (4.12)$$

zusammenzufassen. Analog zur Normalkraft kann auch die Gleichung für das aufnehmbare Moment M_y hergeleitet werden. Unter Berücksichtigung der Gleichungen Gl. (4.7) bis Gl. (4.9) ergibt sich aus

$$M_y = \begin{cases} E \cdot b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cdot \left(\kappa_y \left(z - \frac{h}{2} \right) + \varepsilon_t \right) dz & \text{für } z_{pl} \leq -\frac{h}{2} \\ E \cdot b \cdot \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cdot \left(\kappa_y \left(z - \frac{h}{2} \right) + \varepsilon_t \right) dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{z_{pl}} z \cdot \left(\kappa_y \left(z - \frac{h}{2} \right) + \varepsilon_t - \varepsilon_c \right) dz \right] & \text{für } \frac{h}{2} > z_{pl} > -\frac{h}{2} \end{cases} \quad (4.13)$$

mit den Lösungen der Integrale

$$E \cdot b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cdot \left(\kappa_y \left(z - \frac{h}{2} \right) + \varepsilon_t \right) dz = \frac{E \cdot b \cdot h^3 \cdot \kappa_y}{12} \quad \text{und} \quad (4.14)$$

$$E \cdot b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{z_{pl}} z \cdot \left(\kappa_y \left(z - \frac{h}{2} \right) + \varepsilon_t - \varepsilon_c \right) dz = \frac{E \cdot b}{6 \cdot \kappa_y} \cdot (\varepsilon_t - \varepsilon_c - \kappa_y \cdot h)^2 \cdot \left(\varepsilon_t - \varepsilon_c - \frac{\kappa_y \cdot h}{2} \right) \quad (4.15)$$

die Gleichung

$$M_y = \frac{E \cdot b \cdot h^3 \cdot \kappa_y}{12} - \frac{E \cdot b}{6 \cdot \kappa_y} \cdot \left(-(\varepsilon_t - \varepsilon_c - \kappa_y \cdot h) \right)^2 \cdot \left(\varepsilon_t - \varepsilon_c - \frac{\kappa_y \cdot h}{2} \right). \quad (4.16)$$

Eine Auflösung der Gleichungen Gl. (4.12) und Gl. (4.16) zur Beschreibung der direkten Beziehung zwischen den aufnehmbaren Schnittgrößen Normalkraft und Moment ist aufgrund der Fallunterscheidung, die hier durch das Föppel-Symbol dargestellt wird, nicht möglich. Allerdings ist durch Einsetzen von Werten für die Krümmung κ_y jedes Wertepaar aus Normalkraft und Moment ermittelbar.

4.1.3.2 Einfluss des Volumeneffekts

Für eine vollständige Beschreibung der Querschnittstragfähigkeit muss zusätzlich noch die in Kap. 3.2.2.3 beschriebene Veränderlichkeit der anzunehmenden Zugfestigkeit, bei sich verändernder Zugspannungsverteilung über das beanspruchte Volumen und gleichbleibender Versagenswahrscheinlichkeit berücksichtigt werden. Dieser Einfluss kann anschaulich in den Verteilungseffekt und den Volumeneffekt unterschieden werden. Mit dem

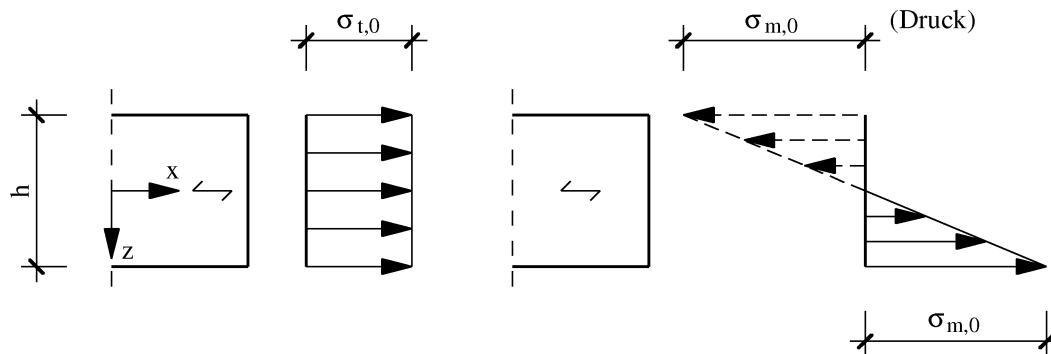


Bild 4.3: Spannungsverteilung bei reinem Zug (links) und bei reiner Biegung (rechts)

Verteilungseffekt wird die veränderliche Versagenswahrscheinlichkeit bei unterschiedlichen Spannungsverteilungen und mit dem Volumeneffekt die veränderliche Versagenswahrscheinlichkeit bei unterschiedlicher Größe des beanspruchten Volumens beschrieben. Da aber beide Effekte durch Gl. (3.1) erfasst werden kann und daher eine Unterscheidung der Effekte nicht nötig ist, werden hier im Weiteren beide Effekte unter dem Begriff Volumeneffekt zusammengefasst.

Um die Zugfestigkeitswerte für Querschnittsbeanspruchungen zwischen reiner Biegung und reinem Zug, also einer kombinierten Biege-Zug-Beanspruchung, zu ermitteln, müsste für jeden einzelnen Zwischenzustand der zugehörige Verteilparameter k in Gl. (3.1) bekannt sein. Das ist selbstverständlich nicht der Fall. Allerdings ist der Unterschied der beiden Verteilparameter k_t und k_m nicht sehr groß. Burger und Glos [15] haben bei ihren Zug- und Biegeprüfungen (siehe auch Kap. 3.2.2.3) je nach Auswertungsart (2- bzw. 3-parametrische Weibull-Verteilung) einen Unterschied von 15 bis 18 Prozent ermittelt. Der Verteilparameter k_m nimmt dabei den größeren Wert an. Bei der Untersuchung des Verteilparameters k_t unterscheiden Glos und Burger 1995 ([29]) zusätzlich noch einen Verteilparameter für die Länge und die Breite. Sie geben Werte für diese Parameter aus Untersuchungen an, die zwischen 1967 und 1991 von zahlreichen Wissenschaftlern durchgeführt wurden. Dabei haben sie vor allem bei älteren Untersuchungen aus den veröffentlichten Prüfungsergebnissen die Verteilparameter für die zweiparametrische Weibullverteilung selbstständig errechnet. Der für die Querschnittstragfähigkeit wesentliche Parameter für die Breite nimmt dabei im Wesentlichen Werte zwischen 2,0 und 10,0 an. Anhand dieser großen Abweichungen ist zu erkennen, dass der Verteilparameter k bezogen auf eine bestimmte Beanspruchungsart bereits einer sehr grossen Streuung unterliegt. Die zusätzliche Abweichung für die verschiedenen Beanspruchungsarten Biegung und Zug sind demgegenüber vergleichsweise klein. Die Annahme eines für Biegung und Zug gleich großen Verteilparameters stellt demnach eine zulässige Vereinfachung dar.

Bei einem bekannten Verhältnis f_t/f_m einer Grundgesamtheit von Hölzern, wie z.B. der Festigkeitsklasse C24, kann ein konstanter Hilfsverteilparameter für diese Grundgesamtheit, genannt k_h , ermittelt werden. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

Da es sich hier um eine Untersuchung der Querschnittstragfähigkeit handelt, kann der Schnittgrößenverlauf über die Trägerlänge vernachlässigt werden. Sind die Verläufe der Normalkraft und des Moments bekannt, ist eine entsprechende Anpassung des Verhältnisse f_t/f_m möglich. Dieser Einfluss soll hier aber nicht weiter untersucht werden, zumal in der Normung ein solches Vorgehen für die Bemessung auch nicht vorgesehen ist.

Es wird weiter davon ausgegangen, dass bei reiner Biegung die Zugspannungen über die Höhe des Querschnitts näherungsweise durch

$$\sigma_m(z) = \sigma_{m,0} \cdot \frac{z}{h/2} \quad (4.17)$$

für $z \geq 0$ beschrieben werden. Dies ist vertretbar, da auch bei einer kleineren Druckfestigkeit und dem Plastizieren des Druckbereichs bei reiner Biegung die Zugspannungen annähernd nach Gl. (4.17) verteilt sind (siehe Bild 3.5). Bei reiner Zugbeanspruchung stellt sich die Spannungsverteilung über den Querschnitt (die Höhe) nach

$$\sigma_t(z) = \sigma_{t,0} \quad (4.18)$$

ein (Bild 4.3). Unter der Bedingung, dass für beide Spannungsverteilungen die gleiche Versagenswahrscheinlichkeit herrscht und diese durch eine zweiparametrische Weibullverteilung mit dem Verteilungsparameter k_h beschrieben werden kann, ergibt sich der Zusammenhang

$$S(\sigma_t) = S(\sigma_m) \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\sigma_{t,0} - \sigma_u}{\sigma_M} \right)^{k_h} dz} = 1 - e^{-\int_0^{h/2} \left(\frac{\sigma_m - \sigma_u}{\sigma_M} \right)^{k_h} dz}$$

$$\Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\sigma_{t,0} - \sigma_u}{\sigma_M} \right)^{k_h} dz = \int_0^{h/2} \left(\frac{\sigma_m - \sigma_u}{\sigma_M} \right)^{k_h} dz$$

$$\Rightarrow h \cdot \left(\frac{\sigma_{t,0}}{\sigma_M} \right)^{k_h} - h \cdot \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_M} \right)^{k_h} = \int_0^{h/2} \left(\frac{\sigma_m \cdot 2}{\sigma_M \cdot h} \right)^{k_h} \cdot z_h^k dz - h \cdot \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_M} \right)^{k_h}$$

$$\Rightarrow h \cdot \left(\frac{\sigma_{t,0}}{\sigma_M} \right)^{k_h} = \left(\frac{\sigma_m \cdot 2}{\sigma_M \cdot h} \right)^{k_h} \cdot \left[\frac{z_h^{k_h+1}}{k_h+1} \right]_0^{h/2} = \left(\frac{\sigma_{m,0}}{\sigma_M} \right)^{k_h} \cdot \left(\frac{1}{h/2} \right)^{k_h} \cdot \frac{(h/2)^{k_h+1}}{k_h+1}$$

$$\Rightarrow h \cdot \left(\frac{\sigma_{t,0}}{\sigma_M} \right)^{k_h} = \frac{h}{2} \frac{1}{k_h+1} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_M} \right)^{k_h}$$

$$\Rightarrow \sigma_{t,0} = \left(\frac{1}{2+2k_h} \right)^{1/k_h} \cdot \sigma_m$$

$$\Rightarrow f_{t,0} = \left(\frac{1}{2+2k_h} \right)^{1/k_h} \cdot f_m$$

zwischen der charakteristischen Zugfestigkeit $f_{t,0} = \sigma_{t,0}$ und der charakteristischen Biege-Zug-Festigkeit $f_m = \sigma_{m,0}$. Durch iterative Berechnung kann der Verteilungsparameter k_h ermittelt werden. Bei den in Deutschland gängigen Festigkeitsklassen C24 und Gl 24h sind die charakteristischen Werte für die Zugfestigkeit mit $f_{t,0} = 14 \text{ N/mm}^2$ (C24) bzw. $f_{t,0} = 16,5 \text{ N/mm}^2$ (Gl 24h) und für die Biegezugfestigkeit mit $f_m = 24 \text{ N/mm}^2$ (C24 und Gl 24h) in [1] und [4] angegeben. Iterativ lässt sich errechnen, dass die Verteilung in diesen Festigkeitsklassen näherungsweise durch Verteilungsparameter mit etwa dem Wert $k_h = 4,4$ für C24 und $k_h = 7,3$ für Gl 24h angegeben werden kann.

Die Wahrscheinlichkeit eines Zugversagens des Querschnitts für eine beliebige Biege-Zugspannungsverteilung, im Folgenden $\sigma_t(z)$ genannt, wird durch

$$\begin{aligned}
S[\sigma_t(z)] &= \min \begin{cases} 1 - \exp \left[- \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_t(z)]^{k_h} dz \right] & \text{für } z_0 < -\frac{h}{2} \\ 1 - \exp \left[- \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} [\sigma_t(z)]^{k_h} dz \right] & \text{für } z_0 > -\frac{h}{2} \end{cases} = \\
&= 1 - \exp \left[- \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_t(z)]^{k_h} dz - \left\langle - \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} [\sigma_t(z)]^{k_h} dz \right\rangle \right]
\end{aligned} \quad (4.20)$$

mit

$$z_0 = \frac{h}{2} - \frac{\varepsilon_t}{\kappa_y}. \quad (4.21)$$

beschrieben. Die Zugfestigkeiten für reinen Zug und reine Biegung sind bekannt. Daraus kann, wie in Gl. (4.19) dargestellt, der Verteilungsparameter k_h bestimmt werden. Damit sind alle Parameter bekannt, um in Abhängigkeit von der Biegezugfestigkeit für reine Biegung $\sigma_{t,m}$ die veränderte Zugfestigkeit für jede beliebige Zugspannungsverteilung $\sigma_t(z)$ anzugeben. Mit dem Ansatz der Gleichheit der Versagenswahrscheinlichkeiten

$$S[\sigma_t(z)] = S[\sigma_{t,m}] \quad (4.22)$$

ergibt sich

$$1 - \exp \left[- \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_t(z)]^{k_h} dz - \left\langle - \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} [\sigma_t(z)]^{k_h} dz \right\rangle \right] = 1 - \exp \left[- \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{t,m}^{k_h} dz \right], \quad (4.23)$$

woraus

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_t(z)]^{k_h} dz + \left\langle - \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} [\sigma_t(z)]^{k_h} dz \right\rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{t,m}^{k_h} dz \quad (4.24)$$

folgt. Gl. (4.3) und Gl. (4.21) eingesetzt, liefert die Gleichung

$$\frac{E^{k_h}}{\kappa_y \cdot (k_h + 1)} \cdot \left[-\varepsilon_t^{(k_h+1)} + (\varepsilon_t - \kappa_y \cdot h)^{(k_h+1)} + \left\langle -(\varepsilon_t - \kappa_y \cdot h) \right\rangle^{(k_h+1)} \right] = -\frac{E^{k_h} \cdot h}{2 \cdot (k_h + 1)} \cdot \varepsilon_{t,m}^{k_h}, \quad (4.25)$$

die mit der Fallunterscheidung

$$-\frac{h}{2} \cdot \varepsilon_{t,m}^{k_h} = \frac{1}{\kappa_y} \cdot \begin{cases} -\varepsilon_t^{(k_h+1)} & \text{für } (\varepsilon_t - \kappa_y \cdot h) \leq 0 \\ -\varepsilon_t^{(k_h+1)} + (\varepsilon_t - \kappa_y \cdot h)^{(k_h+1)} & \text{für } (\varepsilon_t - \kappa_y \cdot h) > 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

zu

$$\varepsilon_{t,m} = \left[\varepsilon_t^{(k_h+1)} - \langle (\varepsilon_t - \kappa_y \cdot h) \rangle^{(k_h+1)} \right]^{\frac{1}{k_h}} \quad (4.27)$$

aufgelöst werden kann. Diese Gleichung lässt sich für die Ermittlung einer beliebigen Zugdehnung ε_t nur iterativ lösen. Um von reiner Druckbeanspruchung über reine Biegung bis zur reinen Zugbeanspruchung schrittweise Momenten-Normalkraft-Wertepaare auszurechnen, muss die Krümmung κ_y in angemessener Schrittweite von näherungsweise Null bis Unendlich gesteigert werden. Dieser Sachverhalt wird in Bild 4.2 veranschaulicht. Dabei müssen immer zunächst iterativ mit Hilfe von Gl. (4.27) die aktuelle Zugfestigkeit $f_t = E \cdot \varepsilon_t$ ermittelt und anschließend das jeweils aufnehmbare Moment und die aufnehmbare Normalkraft berechnet werden. Das Ergebnis kann durch eine Kurve in einem Momenten-Normalkraft-Diagramm dargestellt werden. Der Verlauf der Kurve ist abhängig vom Verhältnis der Druck- zur Biegezugfestigkeit. In Bild 4.5 sind die Momenten-Normalkraft-Interaktionen für einige Festigkeitsklassen mit verschiedenen Druck-Biegezugfestigkeits-Verhältnissen für einen bestimmten Querschnitt (60mm/160mm) dargestellt. In Bild 4.4 werden die Ergebnisse der zahlreichen von Buchanan 1970 [14] durchgeführten Versuche den theoretisch ermittelten Ergebnissen gegenübergestellt.

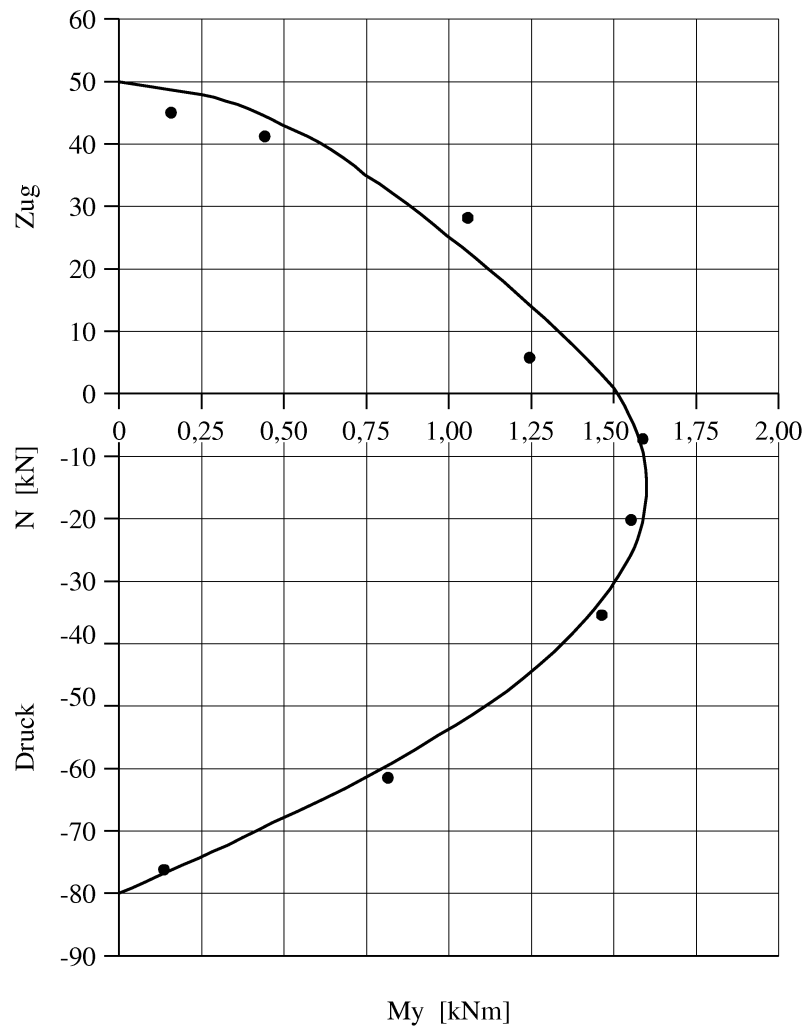


Bild 4.4: Querschnittstragfähigkeit von nordamerikanischem Nadelholz nach den experimentellen Untersuchungen von Buchanan [14] (Punkte) und nach Gl. (4.12) und Gl. (4.16) mit Gl. (4.27) unter Berücksichtigung der 5-Prozent-Fraktile der Festigkeitswerte

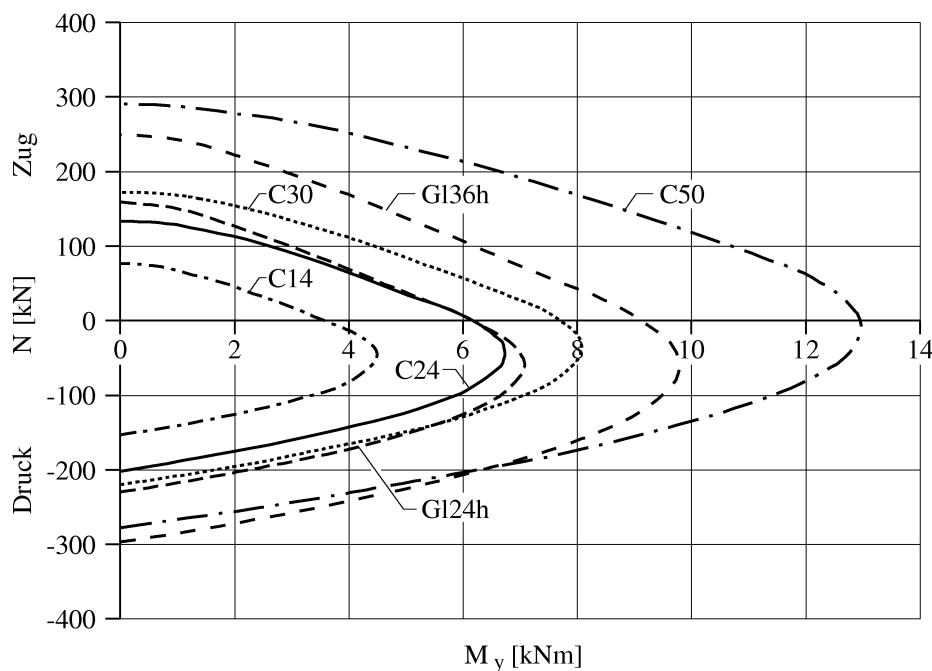


Bild 4.5: Tragfähigkeit eines 60/160 Querschnitts nach Gl. (4.12) und Gl. (4.16) mit Gl. (4.27) für verschiedene Festigkeitsklassen

4.1.4 Querschnittstragfähigkeit im räumlichen Modell

Analog zum ebenen Modell kann auch am räumlichen Modell die Querschnittstragfähigkeit eines rechteckigen Holzstabs ermittelt werden. Das zur Berechnung verwendete Koordinatensystem ist in Bild 4.6 dargestellt.

4.1.4.1 Einfluss des Plastizierens

Ebenfalls unter der Voraussetzung des Ebenbleibens des Querschnitts ist die räumliche Querschnittstragfähigkeit zusätzlich abhängig von der Krümmung um die schwache Achse κ_z . Unter der Annahme, dass der Querschnitt genau dann versagt, wenn die Zugdehnung an einer Stelle überschritten wird, ist die Querschnittstragfähigkeit erreicht, wenn an einer Ecke des Rechteckquerschnitts die maximal zulässige Zugdehnung ε_t auftritt. Der Dehnungsverlauf kann somit für den Fall, dass die maximale Zugdehnung an der Stelle e mit den Koordinaten $(z_e|y_e) = (h/2|b/2)$ des in Bild 4.6 dargestellten Stabs erreicht wird, durch

$$\varepsilon(y, z) = \kappa_y \cdot \left(z - \frac{h}{2} \right) + \kappa_z \cdot \left(y - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_t \quad (4.28)$$

beschrieben werden. Die Spannungsspitze könnte auch in jeder anderen Ecke des Rechteckquerschnitts auftreten, qualitativ ändert sich dadurch jedoch nichts an den Ergebnis-

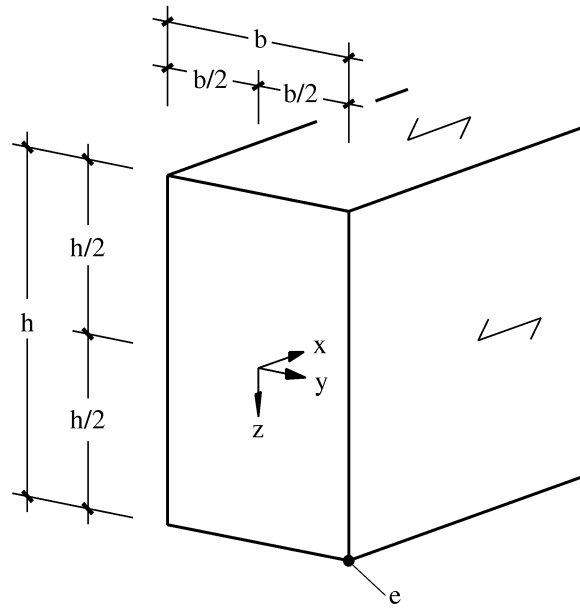


Bild 4.6: Koordinatensystem im Querschnitt eines Biegestabs

sen. Der Spannungsverlauf wird analog zu Gl. (4.3) wieder unter Verwendung des Föppel-Symbols durch

$$\begin{aligned}
 \sigma(y, z) &= E \cdot [\varepsilon(y, z) + \langle -(\varepsilon(y, z) - \varepsilon_c) \rangle] = \\
 &= E \cdot \left[\kappa_y \cdot \left(z - \frac{h}{2} \right) + \kappa_z \cdot \left(y - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_t + \left\langle - \left(\kappa_y \cdot \left(z - \frac{h}{2} \right) + \kappa_z \cdot \left(y - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_t - \varepsilon_c \right) \right\rangle \right] \\
 &\quad (4.29)
 \end{aligned}$$

dargestellt. Zur Ermittlung der Schnittgrößen muss in beide Richtungen des Querschnitts integriert werden. Allgemein gelten die Gleichungen

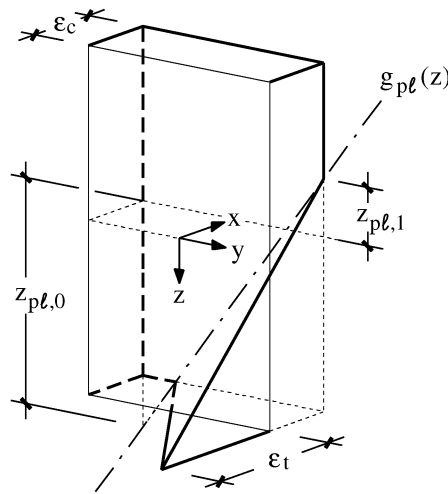


Bild 4.7: Spannungsverteilung eines durch Doppelbiegung und Normalkraft beanspruchten Biegestabs

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma(y, z) \, dy \, dz \quad \text{und} \quad (4.30)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z \cdot \sigma(y, z) \, dy \, dz \quad \text{und} \quad (4.31)$$

$$M_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y \cdot \sigma(y, z) \, dy \, dz. \quad (4.32)$$

In Bild 4.7 ist die Spannungsverteilung für eine beliebige Kombination aus den Momenten M_y und M_z und der Normalkraft N_x dargestellt. Die Gerade

$$g_{pl}(z) = -\frac{\kappa_y}{\kappa_z} \cdot \left(z - \frac{h}{2} \right) + \frac{\epsilon_t - \epsilon_c}{\kappa_z} - \frac{b}{2}, \quad (4.33)$$

die parallel zur y-z-Ebene verläuft, gibt die Grenze zwischen dem linearen und dem plastisierten Bereich des Querschnitts an. Für die Integration sind außerdem die in Bild 4.7 dargestellten Punkte $z_{pl,0}$ und $z_{pl,1}$ wichtig, die durch

$$g_{pl}(z_{pl,0}) = -\frac{b}{2} \quad (4.34)$$

$$g_{pl}(z_{pl,1}) = \frac{b}{2} \quad (4.35)$$

festgelegt und somit durch

$$z_{pl,0} = \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_c}{\kappa_y} \quad (4.36)$$

$$z_{pl,1} = \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_c}{\kappa_y} - b \cdot \frac{\kappa_z}{\kappa_y} \quad (4.37)$$

bestimmt werden können. Aus der Anschauung (Bild 4.7) ergibt sich für die Normalkraft die Gleichung

$$\begin{aligned} N_x = & E \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \varepsilon(y,z) \, dydz \\ & + E \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{z_{pl,0}} \int_{-\frac{b}{2}}^{g_{pl}(z)} \langle -(\varepsilon(y,z) - \varepsilon_c) \rangle \, dydz \\ & - E \cdot \int_{\frac{h}{2}}^{z_{pl,0}} \int_{-\frac{b}{2}}^{g_{pl}(z)} \langle -(\varepsilon(y,z) - \varepsilon_c) \rangle \, dydz \\ & - E \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{z_{pl,1}} \int_{\frac{b}{2}}^{g_{pl}(z)} \langle -(\varepsilon(y,z) - \varepsilon_c) \rangle \, dydz \end{aligned} \quad (4.38)$$

mit vier zu integrierenden Anteilen, deren Auflösung zu der Gleichung

$$N_x = E \cdot A \cdot \left(\varepsilon_t - \kappa_y \cdot \frac{h}{2} - \kappa_z \cdot \frac{b}{2} \right) + \frac{E}{6 \cdot \kappa_y \cdot \kappa_z} \cdot \begin{pmatrix} + \langle -(\varepsilon_t - \varepsilon_c - h \cdot \kappa_y - b \cdot \kappa_z) \rangle^3 \\ - \langle -(\varepsilon_t - \varepsilon_c - b \cdot \kappa_z) \rangle^3 \\ - \langle -(\varepsilon_t - \varepsilon_c - h \cdot \kappa_y) \rangle^3 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

zusammengefasst werden kann. Analog können die Momente M_y und M_z über

$$\begin{aligned} M_y = & E \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z \cdot \varepsilon(y, z) \, dydz \\ & + E \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{z_{pl,0}} \int_{-\frac{b}{2}}^{g_{pl}(z)} z \cdot \langle -(\varepsilon(y, z) - \varepsilon_c) \rangle \, dydz \\ & - E \cdot \int_{\frac{h}{2}}^{z_{pl,0}} \int_{-\frac{b}{2}}^{g_{pl}(z)} z \cdot \langle -(\varepsilon(y, z) - \varepsilon_c) \rangle \, dydz \\ & - E \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{z_{pl,1}} \int_{\frac{b}{2}}^{g_{pl}(z)} z \cdot \langle -(\varepsilon(y, z) - \varepsilon_c) \rangle \, dydz \end{aligned} \quad (4.40)$$

bzw. durch die entsprechende Gleichung für M_z zu

$$M_y = E \cdot I_y \cdot \kappa_y + \frac{E}{24 \cdot \kappa_y^2 \cdot \kappa_z} \cdot \begin{pmatrix} - \langle -(\varepsilon_t - \varepsilon_c - h \cdot \kappa_y - b \cdot \kappa_z) \rangle^3 \cdot (\varepsilon_t - \varepsilon_c - h \cdot \kappa_y - b \cdot \kappa_z) \\ + \langle -(\varepsilon_t - \varepsilon_c - b \cdot \kappa_z) \rangle^3 \cdot (\varepsilon_t - \varepsilon_c - 2 \cdot h \cdot \kappa_y - b \cdot \kappa_z) \\ + \langle -(\varepsilon_t - \varepsilon_c - h \cdot \kappa_y) \rangle^3 \cdot (\varepsilon_t - \varepsilon_c - h \cdot \kappa_y) \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

und

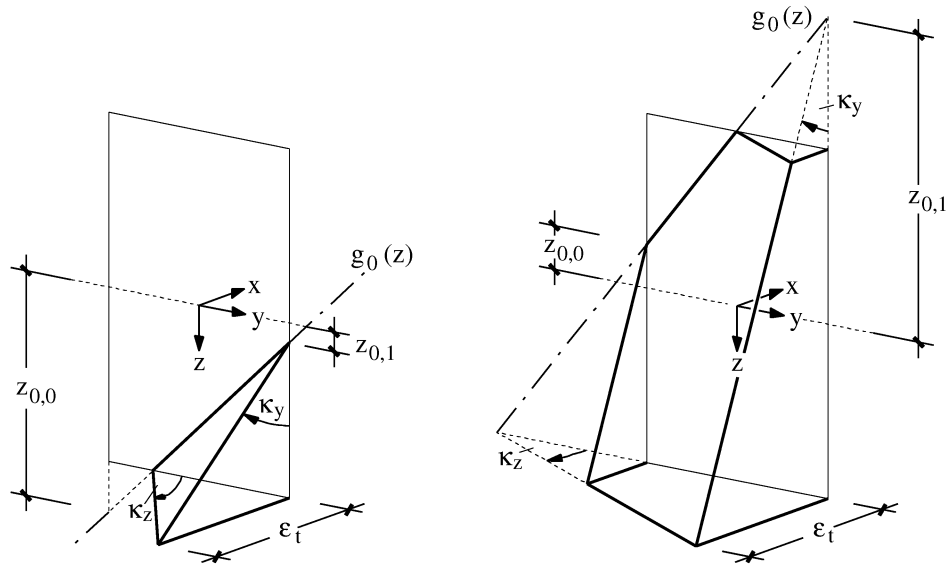


Bild 4.8: Beliebige räumliche Zugspannungsverteilungen über den Querschnitt

$$M_z = E \cdot I_z \cdot \kappa_z + \frac{E}{24 \cdot \kappa_y \cdot \kappa_z^2} \cdot \left(\begin{aligned} & - \langle -(\epsilon_t - \epsilon_c - h \cdot \kappa_y - b \cdot \kappa_z) \rangle^3 \cdot (\epsilon_t - \epsilon_c - h \cdot \kappa_y - b \cdot \kappa_z) \\ & + \langle -(\epsilon_t - \epsilon_c - h \cdot \kappa_y) \rangle^3 \cdot (\epsilon_t - \epsilon_c - h \cdot \kappa_y - 2 \cdot b \cdot \kappa_z) \\ & + \langle -(\epsilon_t - \epsilon_c - b \cdot \kappa_z) \rangle^3 \cdot (\epsilon_t - \epsilon_c - b \cdot \kappa_z) \end{aligned} \right) \quad (4.42)$$

hergeleitet werden. Mit den drei Gleichungen (Gl. (4.39), Gl. (4.41) und Gl. (4.42)) kann nun die Querschnittstragfähigkeit jeweils für ein Wertepaar der Krümmungen κ_y und κ_z ermittelt werden.

4.1.4.2 Einfluss des Volumeneffekts

Des Weiteren muss noch die Anpassung der Zugfestigkeit an die Zugspannungsverteilung über den Querschnitt in die Berechnung einbezogen werden. Daher ist die Wahrscheinlichkeit eines Zugversagens des Querschnitts für eine beliebige Zugspannungsverteilung $\sigma_t(y, z)$ zu bestimmen. In Bild 4.8 sind zwei mögliche Zugspannungsverteilungen dargestellt, die bei einer kombinierten N- M_y - M_z -Beanspruchung auftreten können. Die Gerade

$$g_0(z) = -\frac{\kappa_y}{\kappa_z} \cdot \left(z - \frac{h}{2} \right) + \frac{\epsilon_t}{\kappa_z} - \frac{b}{2} \quad (4.43)$$

stellt die Spannungsnulllinie dar. Die Punkte $z_{0,0}$ und $z_{0,1}$ werden durch

$$g_{pl}(z_{0,0}) = -\frac{b}{2} \quad (4.44)$$

$$g_{pl}(z_{0,1}) = \frac{b}{2} \quad (4.45)$$

festgelegt und können zu

$$z_{0,0} = \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon_t}{\kappa_y} \quad (4.46)$$

$$z_{0,1} = \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon_t}{\kappa_y} - b \cdot \frac{\kappa_z}{\kappa_y} \quad (4.47)$$

aufgelöst werden. Damit lässt sich analog zu Gl. (4.20) jetzt im räumlichen Modell die Gleichung

$$S[\sigma_t(y, z)] = 1 - \exp \left(\begin{aligned} & - \int_{z_{0,1}}^{\frac{h}{2}} \int_{g_0(z)}^{\frac{b}{2}} [\sigma_t(y, z)]^{k_h} dy dz \\ & + \left\langle \int_{z_{0,0}}^{\frac{h}{2}} \int_{g_0(z)}^{-\frac{b}{2}} [\sigma_t(y, z)]^{k_h} dy dz \right\rangle \\ & + \left\langle \int_{z_{0,1}}^{-\frac{h}{2}} \int_{g_0(z)}^{\frac{b}{2}} [\sigma_t(y, z)]^{k_h} dy dz \right\rangle \\ & - \left\langle \int_{z_{0,0}}^{-\frac{h}{2}} \int_{g_0(z)}^{-\frac{b}{2}} [\sigma_t(y, z)]^{k_h} dy dz \right\rangle \end{aligned} \right) \quad (4.48)$$

zur Beschreibung der Versagenswahrscheinlichkeit für eine beliebige Zugspannungsverteilung ermitteln. Dabei kommt wie auch schon bei der einachsigen Biegung der vereinfachte Hilfswert für die Form der Weibull-Verteilung k_h zur Anwendung. Durch Gleichsetzen dieser Versagenswahrscheinlichkeit und jener für reine, einachsige Biegung $S[\sigma_{t,m}]$ (siehe auch Gl. (4.22))

$$S[\sigma_t(y, z)] = S[\sigma_{t,m}] \quad (4.49)$$

ergibt sich der Ansatz

$$\begin{aligned}
& + \int_{z_{0,1}}^{\frac{h}{2}} \int_{g_0(z)}^{\frac{b}{2}} [\sigma_t(y, z)]^{k_h} dy dz - \left\langle \int_{z_{0,2}}^{\frac{h}{2}} \int_{g_0(z)}^{-\frac{b}{2}} [\sigma_t(y, z)]^{k_h} dy dz \right\rangle \\
& - \left\langle \int_{z_{0,1}}^{-\frac{h}{2}} \int_{g_0(z)}^{\frac{b}{2}} [\sigma_t(y, z)]^{k_h} dy dz \right\rangle + \left\langle \int_{z_{0,2}}^{-\frac{h}{2}} \int_{g_0(z)}^{-\frac{b}{2}} [\sigma_t(y, z)]^{k_h} dy dz \right\rangle = \\
& = b \cdot \int_{z_{0,1}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_{t,m}(z)]^{k_h} dz,
\end{aligned} \tag{4.50}$$

aus dem die Gleichung

$$\frac{A \cdot \varepsilon_{t,m}^{k_h}}{2 \cdot (1 + k_h)} = \frac{\varepsilon_t^{(2+k_h)} - \langle \varepsilon_t - \kappa_y \cdot h \rangle^{(2+k_h)} - \langle \varepsilon_t - \kappa_z \cdot b \rangle^{(2+k_h)} + \langle \varepsilon_t - \kappa_y \cdot h - \kappa_z \cdot b \rangle^{(2+k_h)}}{(1 + k_h) \cdot (2 + k_h) \cdot \kappa_y \cdot \kappa_z} \tag{4.51}$$

folgt, aus der die Beziehung zwischen der Biegezugdehnung $\varepsilon_{t,m}$ und der größtmöglichen Zugdehnung bei gleicher Versagenswahrscheinlichkeit für einen beliebigen Spannungszustand ε_t in Abhängigkeit von den Krümmungen κ_y und κ_z

$$\varepsilon_{t,m} = \left[2 \cdot \frac{\varepsilon_t^{(2+k_h)} - \langle \varepsilon_t - \kappa_y \cdot h \rangle^{(2+k_h)} - \langle \varepsilon_t - \kappa_z \cdot b \rangle^{(2+k_h)} + \langle \varepsilon_t - \kappa_y \cdot h - \kappa_z \cdot b \rangle^{(2+k_h)}}{A \cdot (2 + k_h) \cdot \kappa_y \cdot \kappa_z} \right]^{\frac{1}{k_h}} \tag{4.52}$$

hergeleitet werden kann, die sich wiederum nur iterativ für ε_t auflösen lässt.

4.2 Darstellung der normierten Querschnittstragfähigkeit von Bauholz

4.2.1 Darstellung der Querschnittstragfähigkeit von Bauholz der Festigkeitsklasse C24

Eine allgemeinere Darstellung der Momenten-Normalkraft-Interaktion ist möglich, wenn die Momente und Normalkräfte normiert werden. Dies geschieht durch Division der nach Gl. (4.12) und Gl. (4.16) mit Gl. (4.27) ermittelten Schnittgrößen durch einen Referenzwert. Hier werden das maximale elastische Moment

$$M_{el} = f_{m,k} \cdot \frac{b \cdot h^2}{6} > 0 \tag{4.53}$$

und die maximale (elastische) Normalkraft für Druckbeanspruchungen

$$N_{el,c} = f_{c,0,k} \cdot b \cdot h > 0 \quad (4.54)$$

als Referenzwerte verwendet. In Bild 4.9 ist für die Festigkeitsklasse C24 eine räumliche Darstellung dieser Querschnittstragfähigkeit abgebildet. Diese Darstellungsform gibt zwar einen guten Überblick über das Tragverhalten eines Querschnitts aus Holz der Festigkeitsklasse C24, genaue Ergebnisse sind jedoch nicht ablesbar. Diese tropfenförmige Hüllkurve ist doppelt symmetrisch. Die Ebenen, aufgespannt durch die x- und die z-Achse und durch die y- und die z-Achse, sind die Symmetrie-Ebenen. Sämtliche relevanten Informationen sind also bereits in einem Viertel dieser Hüllkurve enthalten.

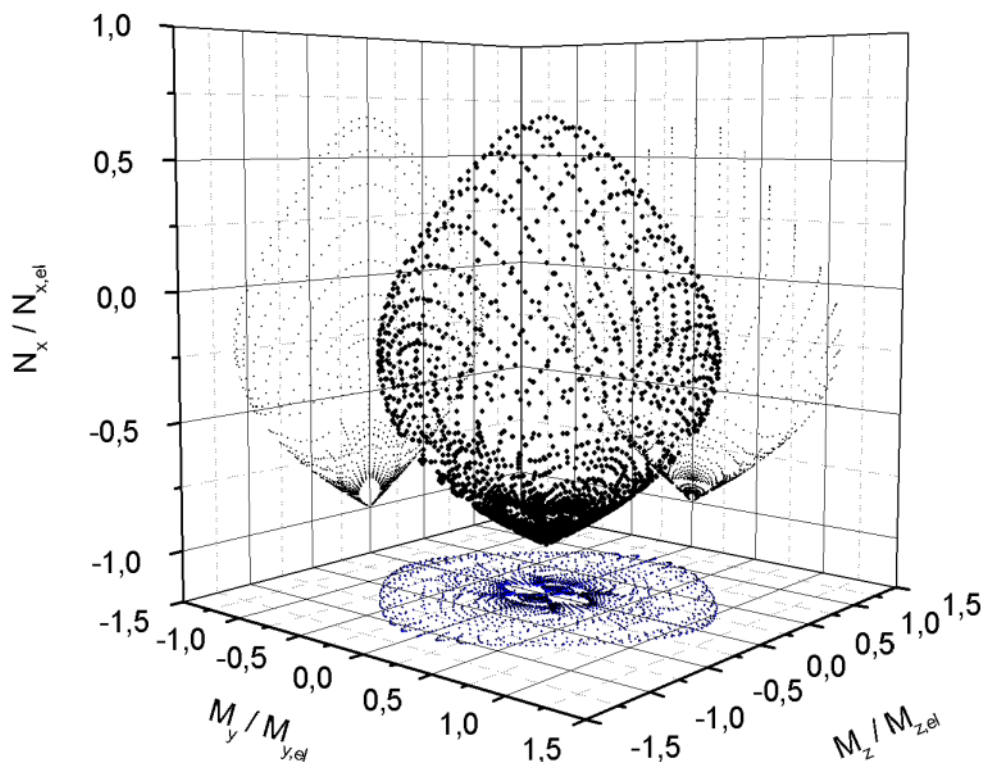


Bild 4.9: Charakteristische Tragfähigkeit eines C24 Querschnitts

Bei der normierten Querschnittstragfähigkeit ist die Momenten-Normalkraft-Interaktion für beide Momente M_y und M_z äquivalent. In Bild 4.10 ist beispielhaft die $N_x - M_y$ -Interaktion für verschiedene Ausnutzungsgrade $\alpha_{M,el,z} = M_z / M_{z,el}$ dargestellt. Dabei er-

gibt sich durch Austauschen von M_y und M_z die N_x - M_z -Interaktion für verschiedene Auslastungsgrade $\alpha_{M,el,y} = M_y/M_{y,el}$.

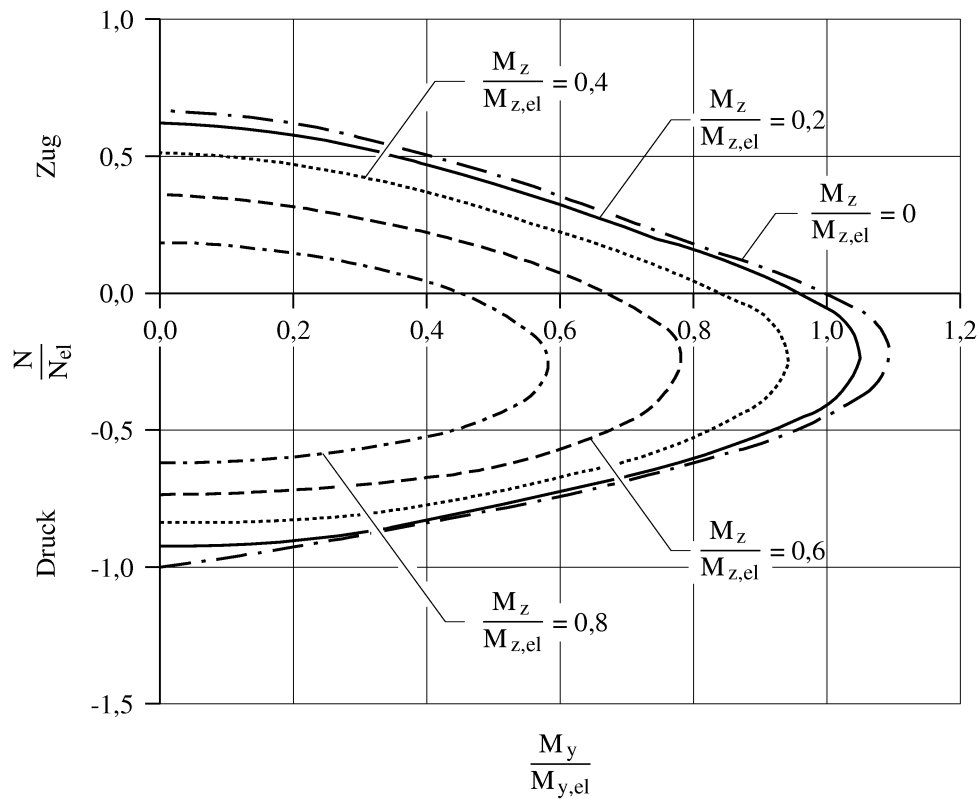


Bild 4.10: Charakteristische Tragfähigkeit eines C24 Querschnitts, M_y - N -Interaktion bei verschiedenen Auslastungsgraden von M_z

Die M_y - M_z -Interaktion für verschiedene Auslastungsgrade $\alpha_{N,el} = N_x/N_{x,el}$ ist übersichtlich nicht in einem Diagramm abbildbar. In Bild 4.11 ist die M_y - M_z -Interaktion im Zugbereich und in Bild 4.12 im Druckbereich dargestellt.

Die Diagramme in Bild 4.11 und Bild 4.12 sind unabhängig vom Verhältnis h/b . Es wird deutlich, dass sowohl bei zusätzlicher Druck- als auch bei zusätzlicher Zugbeanspruchung eine Reserve gegenüber einer linearen Interaktionsannahme vorhanden ist. Diese Reserve ist für Querschnitte ohne Druckbeanspruchung fast ausschließlich auf die größere Zugfestigkeitsannahme aufgrund des Volumeneffekts zurückzuführen. Ohne Berücksichtigung des Volumeneffekts verläuft die M_y - M_z -Interaktion mit Zugbeanspruchung nahezu linear. Bei vorhandener Druckbeanspruchung nimmt der Einfluss des Volumeneffekts ab, da der Anteil der Zugbeanspruchung des Querschnitts abnimmt. Dagegen nimmt der Einfluss des Plastizierens zu.

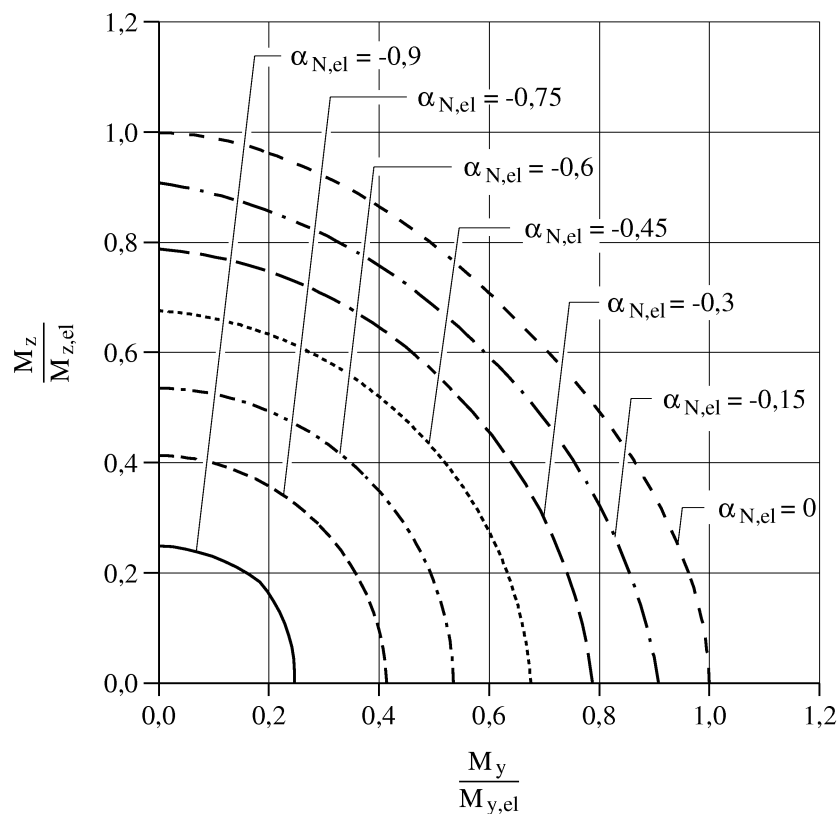


Bild 4.11: Charakteristische Tragfähigkeit eines C24 Querschnitts, M_y - M_z -Interaktion bei verschiedenen Ausnutzungsgraden der Normalkraft (Zug)

4.2.2 Darstellung der Querschnittstragfähigkeit von Bauholz der Festigkeitsklasse Gl 24h

Die Untersuchung der Querschnittstragfähigkeit von Brettschichtholz der Festigkeitsklasse Gl 24h ergibt qualitativ keine wesentlichen Unterschiede zu der Querschnittstragfähigkeit des Vollholzes der Festigkeitsklasse C24. Daher wird hier auf die Darstellung der Ergebnisse der Untersuchungen, die auch schon für Holz der Festigkeitsklasse C24 durchgeführt wurden, verzichtet.

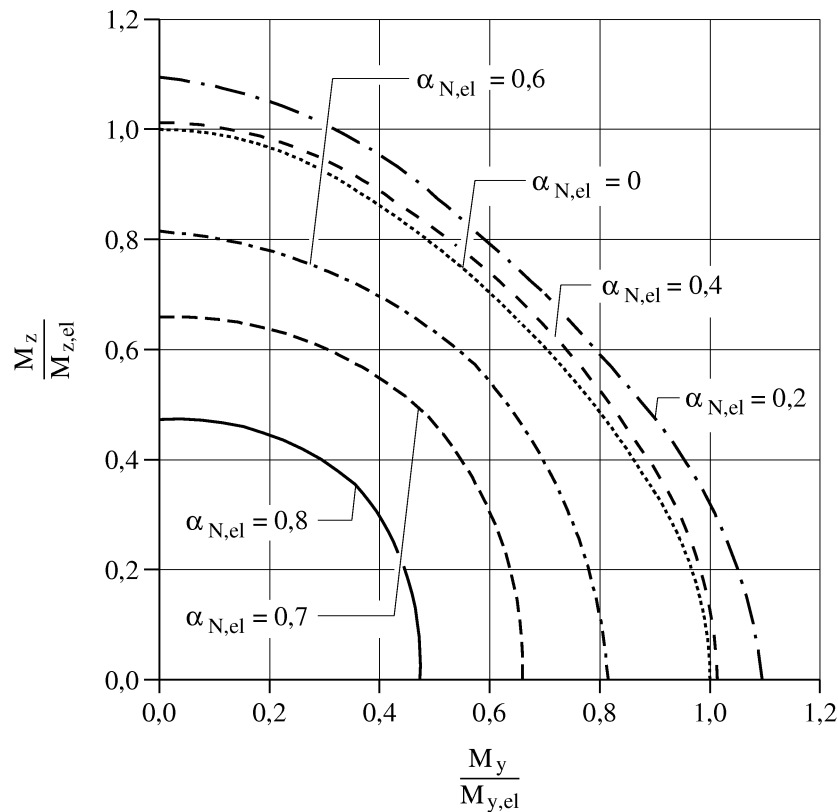


Bild 4.12: Charakteristische Tragfähigkeit eines C24 Querschnitts, M_y - M_z -Interaktion bei verschiedenen Ausnutzungsgraden der Normalkraft (Druck)

4.3 Weitere Untersuchungen zur Querschnittstragfähigkeit von Bauholz

4.3.1 Untersuchung des Einflusses veränderter Arbeitslinien auf die Querschnittstragfähigkeit

Durch eine weitere Untersuchung mit Hilfe der FE-Methode soll der positive Einfluss des 'Buckels' in der Arbeitslinie, Kurve a in Bild 3.2, und der negative Einfluss der Ausrundung der Arbeitslinie, Kurve b in Bild 3.2, auf die Momenten-Normalkraft-Interaktion im Druckbereich untersucht werden. Für die FEM-Analyse wurden für die Arbeitslinie mit 'Buckel' die in Bild 4.13 als Kurve A bezeichnete und für die ausgerundete Arbeitslinie die in Bild 4.13 als Kurve B bezeichnete Näherungskurve verwendet. Ergebnis der Untersuchung ist, dass die Verwendung der Arbeitslinien A und B nur eine unwesentliche Veränderung der Tragfähigkeiten ergeben, allerdings nehmen die Verformungen bei Verwendung der Arbeitslinie B zu.

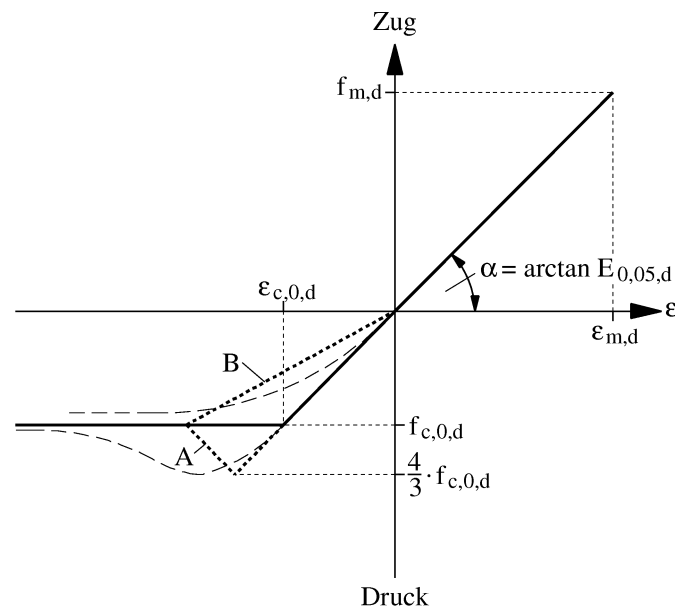


Bild 4.13: Vereinfachte Arbeitslinien für die Modellierung von Holz bei Druck- und Biegebeanspruchung

4.3.2 Untersuchung der Dehnungsbegrenzung im Druckbereich

Beim Übergang von reiner Biegung zu reinem Druck nimmt die Krümmung und damit die Dehnung im Druckbereich stark zu. Bei einer zu großen Dehnung verliert das Bauteil seine Gebrauchstauglichkeit. Blaß nimmt 1987 [10] bei der Untersuchung von Druckstäben eine Grenzdehnung im Druckbereich von 5 Prozent an. Eine Berechnung der Querschnittstragfähigkeit unter Berücksichtigung dieser Grenzdehnung zeigt, dass ihre Berücksichtigung nur einen sehr geringen Einfluss auf die Tragfähigkeit hat. In Bild 4.14 sind die Tragfähigkeiten für einen C24 Querschnitt bei verschiedenen Dehnungsbegrenzungen dargestellt. Erst bei einer Grenzdehnung von etwa 1 Prozent wird eine Abminderung der Tragfähigkeit deutlich. Poulsen [57] beschreibt 1998 einachsige Druckversuche an Probekörpern, bei denen weggesteuert über 2 Prozent Dehnung aufgebracht wurden, ohne dass die Tragfähigkeit kleiner wurde. Bei etwa 2,5 Prozent Dehnung wurden die Versuche abgebrochen ohne, dass ein Nachlassen der Tragfähigkeit erkennbar gewesen wäre. Daher ist eine Dehnungsbegrenzung auf unter 1 Prozent und damit eine Abminderung der Querschnittstragfähigkeit nicht notwendig.

4.3.3 Untersuchung des Einflusses des Volumeneffekts auf die Querschnittstragfähigkeit

Das Versagen eines Holzquerschnitts tritt genau dann ein, wenn an einer Stelle des Querschnitts die Zugfestigkeit erreicht wird. Bei Berücksichtigung des Volumeneffekts kann für jede Beanspruchungskombination aus zweiachsiger Biegung und Normalkraft ein anderer Wert für die Zugfestigkeit ermittelt werden. In diesem Kapitel wird untersucht, welchen Einfluss die Berücksichtigung des Volumeneffekts auf die Querschnittstragfähigkeit

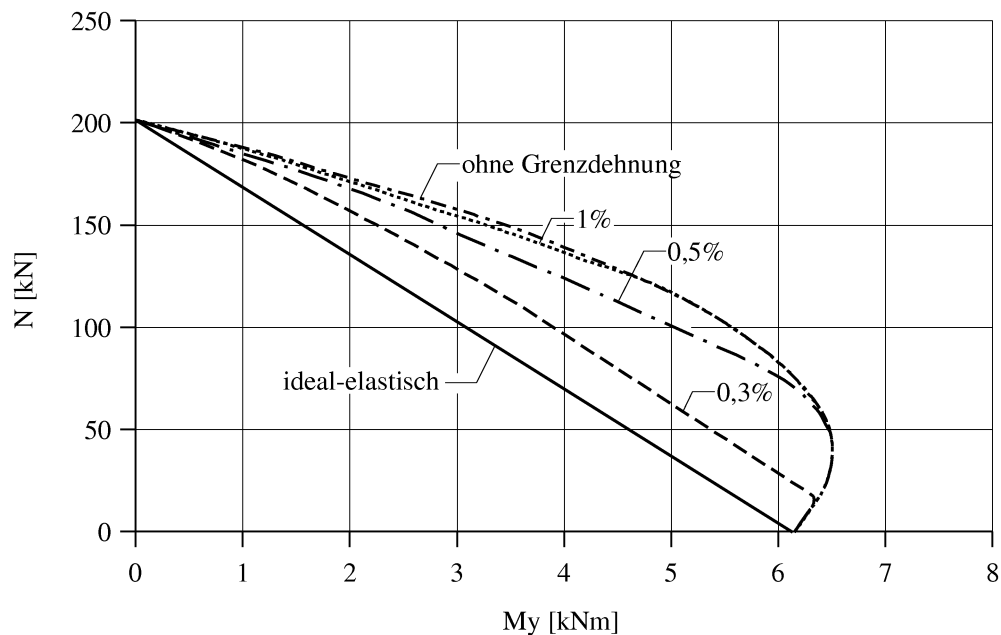


Bild 4.14: Tragfähigkeit eines C24 Querschnitts (60/160) mit unterschiedlich großen Dehnungsbegrenzungen im Druckbereich

higkeit besitzt. Dieser Einfluss wird getrennt für die Momenten-Normalkraft-Interaktion und für Momenten-Momenten-Interaktion untersucht. Dabei wird der Schwerpunkt auf die Interaktionen im Druckbereich gelegt. Denn biegedrillknickgefährdete Stäbe werden im Allgemeinen durch eine Kombination von zweiachsiger Biegung und Druckkraft beansprucht. Kippgefährdete Stäbe mit einer Beanspruchungskombination aus zweiachsiger Biegung und Zugkraft sind theoretisch zwar denkbar, doch im Gegensatz zur Druckkraft übt die Zugkraft einen positiven Einfluss auf kippgefährdete Biegestäbe aus. Eine Untersuchung solcher durch Zugkraft beanspruchter Stäbe ist nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Deutlich gemacht wird der Einfluss des Volumeneffekts, indem jeweils zwei Untersuchungen durchgeführt werden. Den analytisch mit Hilfe der in diesem Kapitel hergeleiteten Gleichungen ermittelten Querschnittstragfähigkeiten, die sowohl den Volumeneffekt als auch das Plastizieren im Druckbereich berücksichtigen, werden mit Hilfe der FEM numerisch ermittelte Querschnittstragfähigkeiten gegenüber gestellt. Die Ergebnisse der numerischen FE-Methode beinhalten nur das Plastizieren im Druckbereich nicht aber den Volumeneffekt. Die Differenz der Ergebnisse gibt somit den Einfluss des Volumeneffekts auf die Querschnittstragfähigkeit an.

4.3.3.1 Einfluss des Volumeneffekts auf die M-N-Interaktion

Die numerischen Vergleichsrechnungen für die Momenten-Normalkraft-Interaktion im Druckbereich werden hier mit Hilfe der FE-Methode und dem Programm ANSYS durchgeführt, wobei sich der Volumeneffekt nicht berücksichtigen lässt. Das Plastizieren im

Druckbereich kann mit Hilfe von geeigneten Stab-Elementen (BEAM188), bei denen die Eingabe einer Arbeitslinie möglich ist, berücksichtigt werden. Als Arbeitslinie wird die ideal-elastisch-plastische Arbeitlinie in Bild 4.1 verwendet. In Bild A.6 ist die numerisch ermittelte N-M-Interaktion für einen Querschnitt der Festigkeitsklasse C24 und in Bild 4.15 für einen Querschnitt der Festigkeitsklasse Gl 24h der theoretischen Berechnung nach Gl. (4.16) und Gl. (4.12) mit Gl. (4.27) für eine einachsige Momentenbeanspruchung gegenübergestellt. Aus den Darstellungen geht hervor, dass die Berücksichtigung des Volumeneffekts zwar eine größere Auslastung des Querschnitts ermöglicht, die Erhöhung der Tragfähigkeit jedoch vernachlässigbar klein ist. Die Tragreserven bei der M-N-Interaktion sind zum größten Teil auf das Plastizieren im Druckbereich zurückzuführen.

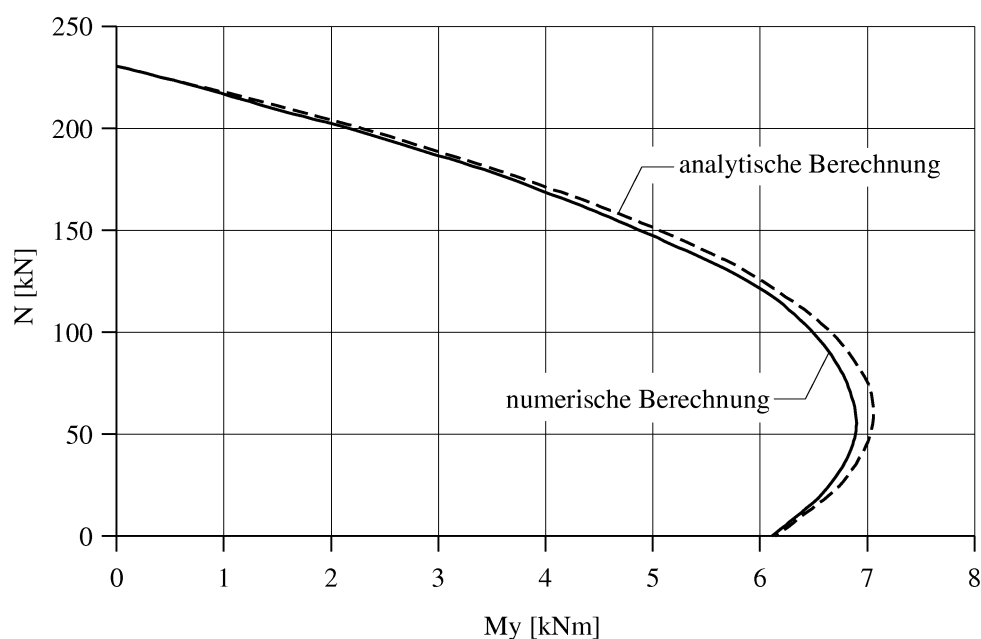


Bild 4.15: Vergleich der ermittelten charakteristischen Tragfähigkeit eines Gl 24h Querschnitts (60/160) bei Druck- und Biegebeanspruchung nach analytischer und numerischer Berechnung

4.3.3.2 Einfluss des Volumeneffekts auf die M_y - M_z -Interaktion

In Kap. 4.2.1 wurde bereits erläutert, dass bei dieser Interaktion die Nichtlinearität ausschließlich aus dem Einfluss des Volumeneffekts resultiert. Bei zusätzlicher Druckbeanspruchung gilt das so nicht mehr. Der Querschnitt fängt bereits bei kleinem zusätzlichem Druck an zu plastizieren. Die Auswertung der M_y - M_z -Interaktion nach den Gleichungen Gl. (4.39), Gl. (4.41) und Gl. (4.42) unter Berücksichtigung von Gl. (4.52) beinhaltet sowohl das Plastizieren als auch den Volumeneffekt. Die numerische Analyse mit Hilfe der FEM berücksichtigt als Nichtlinearität nur das Plastizieren. Die Differenz, die mit den zugehörigen Interaktionskurven in Bild 4.16 deutlich gemacht wird, kann somit vollständig dem Volumeneffekt zugeordnet werden. Die Ergebnisse werden normiert dargestellt

und sind somit unabhängig vom Verhältnis h/b . Ein Einfluss des Verhältnisses h/b kann bei keiner Untersuchung festgestellt werden.

Zunächst wird hier die reine M_y - M_z -Interaktion ohne zusätzliche Druckbeanspruchung untersucht. In DIN 1052:2004-08 gibt es zur Erfassung der vorhandenen Tragfähigkeitsreserve des Querschnitts gegenüber der linearen M_y - M_z -Interaktion den Beiwert k_{red} . In Bild 4.16 ist die M_y - M_z -Interaktion für Querschnitte mit beliebigem h/b -Verhältnis unter Berücksichtigung von k_{red} der analytisch und der numerisch ermittelten gegenübergestellt. Die numerische Interaktionskurve verläuft erwartungsgemäß linear. Die mit Hilfe des Beiwerts k_{red} ermittelte M_y - M_z -Interaktionskurve liegt klar unterhalb der analytisch ermittelten. Damit wird deutlich, dass die Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit ohne Normalkraftbeanspruchung mit Hilfe von k_{red} stark 'auf der sicheren Seite' liegt.

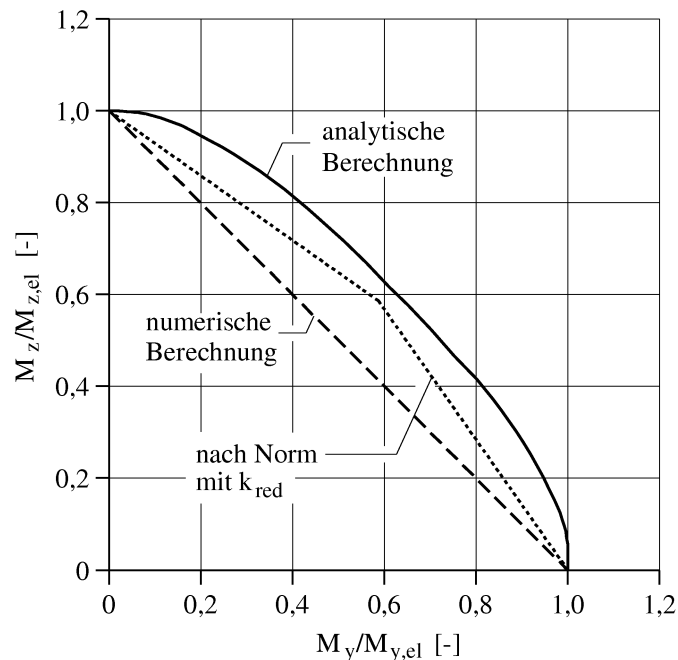


Bild 4.16: Analytisch, numerisch und nach Norm mit k_{red} ermittelte Tragfähigkeit von Querschnitten mit beliebigem h/b -Verhältnis der Festigkeitsklasse Gl 24h

Bei zusätzlicher Zugbeanspruchung bleibt die M_y - M_z -Interaktion ohne Berücksichtigung des Volumeneffekts linear, da kein Plastizieren des Querschnitts auftreten kann. Der Einfluss des Volumeneffekts nimmt mit zunehmender Zugbeanspruchung logischerweise zu. Die Tragreserve gegenüber der linearen Interaktion steigt an. Die vereinfachte Berücksichtigung des Volumeneffekts durch den Beiwert k_{red} liegt bei zusätzlicher Zugbeanspruchung also noch stärker als bei fehlender Normalkraft auf der sicheren Seite.

Im Folgenden wird die M_y - M_z -Interaktion mit zusätzlicher Druckbeanspruchung untersucht, die für biegedrillknickgefährdete Stäbe von besonderer Bedeutung ist. In Bild 4.17,

Bild 4.18 und Bild 4.19 sind die Interaktionskurven für verschiedene Ausnutzungsgrade der Druckbeanspruchung nach numerischer und analytischer Berechnung dargestellt. Es wird deutlich, dass mit zunehmender Druckauslastung der Einfluss des Volumeneffekts kleiner wird. Das ist damit zu erklären, dass mit zunehmender Druckbeanspruchung der Biegezugbereich kleiner wird. Dadurch wird zwar die Zugfestigkeit wegen der Angleichung der Versagenswahrscheinlichkeiten immer grösser, doch der Anteil des Zugbereichs an der Gesamttragfähigkeit des Querschnitts wird überproportional kleiner.

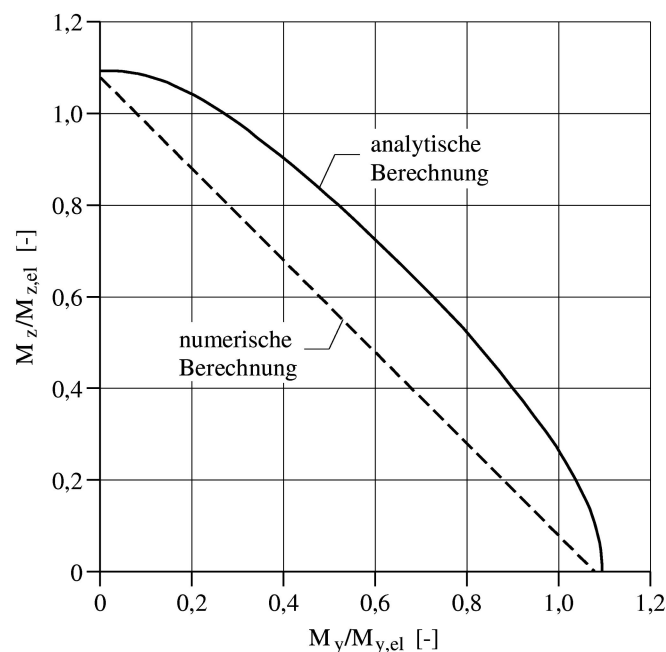


Bild 4.17: Analytisch und numerisch ermittelte Tragfähigkeit von Querschnitten der Festigkeitsklasse Gl 24h mit einer Normalkraftauslastung von 0,1

Es stellt sich die Frage, ob der in der Normung vorgeschlagene Beiwert zur vereinfachten Berücksichtigung des Volumeneffekts k_{red} bei zunehmender Druckbeanspruchung noch sichere Ergebnisse liefert. Bei flüchtiger Betrachtung kann zu dem Schluss gelangt werden, die Tragfähigkeit läge bis auf kleine Ausnahmen 'auf der sicheren Seite', da die M_y - M_z -Interaktion mit Hilfe von k_{red} und der Quadrierung der Druckauslastung stets Ergebnisse liefert, die immer deutlich unter der analytisch hergeleiteten liegen. So z.B. bei einer Druckauslastung von 0,5 in Bild 4.20 oder einer von 0,8 in Bild 4.21.

Bei dieser Betrachtung wird jedoch übersehen, dass der Beiwert k_{red} nur für den Einfluss des Volumeneffekts steht. In Kap. 5.3 wird gezeigt, dass die Normalkraft-Momenten-Interaktion mit quadratischer Normalkraftauslastung (Gl. (5.1)) eine sehr gute Näherung der N-M-Interaktion für Bauteile mit geometrisch nichtlinearem Tragverhalten darstellt. Um zu überprüfen, ob der Beiwert k_{red} sichere Ergebnisse liefert, muss seine Traglast erhöhender Faktor auf die Querschnittstragfähigkeit angewendet werden, die nur unter

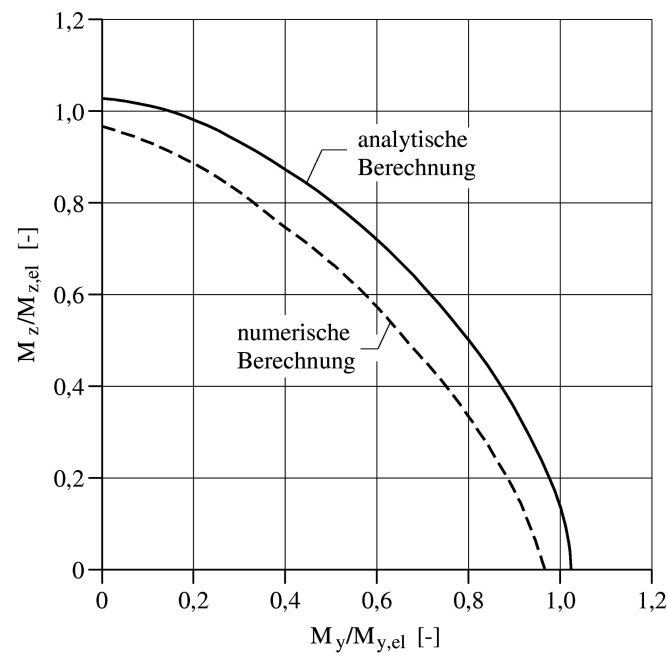


Bild 4.18: Analytisch und numerisch ermittelte Tragfähigkeit von Querschnitten der Festigkeitsklasse Gl 24h mit einer Normalkraftauslastung von 0,5

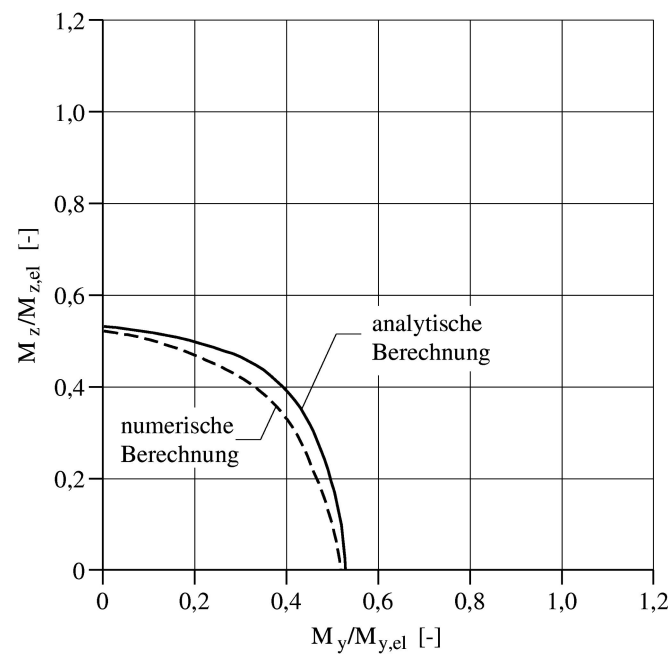


Bild 4.19: Analytisch und numerisch ermittelte Tragfähigkeit von Querschnitten der Festigkeitsklasse Gl 24h mit einer Normalkraftauslastung von 0,8

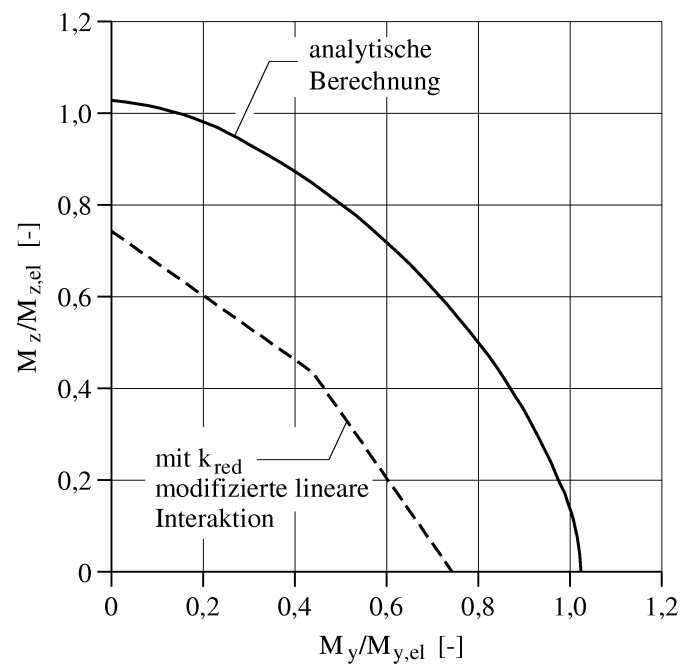


Bild 4.20: Analytisch, numerisch und nach Norm mit k_{red} ermittelte Tragfähigkeit von Querschnitten der Festigkeitsklasse Gl 24h mit einer Normalkraftauslastung von 0,5

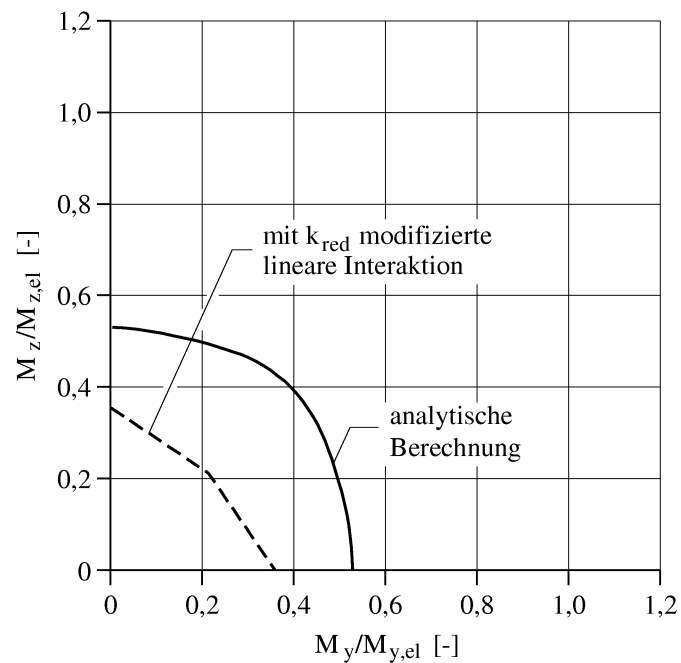


Bild 4.21: Analytisch, numerisch und nach Norm mit k_{red} ermittelte Tragfähigkeit von Querschnitten der Festigkeitsklasse Gl 24h mit einer Normalkraftauslastung von 0,8

Berücksichtigung des Plastizierens ermittelt wurde. Durch die Erhöhung der mit Hilfe der FEM ermittelten M_y - M_z -Wertepaare durch den Beiwert k_{red} kann überprüft werden, welchen Einfluss der Beiwert k_{red} auf knickgefährdete Bauteile hat. Die Ergebnisse dieser Anwendung sind in Bild 4.22, Bild 4.23 und Bild 4.24 den vorher bereits dargestellten Ergebnissen gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass bereits bei einer Druckauslastung von 0,5 bei Verwendung von k_{red} die Tragfähigkeit in Teilbereichen gegenüber der analytisch hergeleiteten Tragfähigkeit überschätzt wird. Bei einer Druckauslastung von 0,8 ist sogar eine Überschätzung von bis zu 15 Prozent erkennbar. Allerdings muss dabei wiederum beachtet werden, dass diese Überschätzung nur den Anteil der Biegebeanspruchung betrifft. Nach Umrechnung der Überschätzung auf den gesamten Querschnitt kann festgestellt werden, dass die Überschätzung 5 Prozent nicht übersteigt. Diese Abweichung kann mit Hinweis auf die starke Streuung der übrigen Eingangsdaten problemlos hingenommen werden, zumal es nur sehr kleine Bemessungsbereiche betrifft.

Die Notwendigkeit einer Begrenzung der Verwendung von k_{red} auf Querschnitte mit einem Verhältnis h/b kleiner 4 kann hier nicht bestätigt werden. Bei der Untersuchung verschiedener Querschnitte konnte kein Anhaltspunkt für die Annahme gefunden werden, dass das Verhältniss h/b den Einfluss des Volumeneffekts auf die Tragfähigkeit irgendwie veränderte. Da der Volumeneffekt vereinfachend durch den Beiwert k_{red} berücksichtigt wird, kann auch kein Grund gefunden werden, den Beiwert auf bestimmte Querschnittsverhältnisse zu begrenzen.

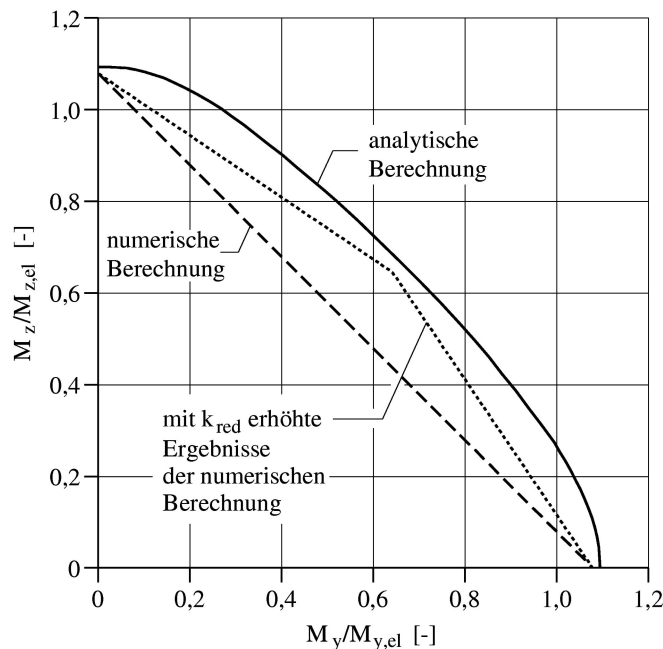


Bild 4.22: Analytisch und numerisch ermittelte sowie der durch den Beiwert k_{red} erhöhten numerischen Tragfähigkeit von Querschnitten der Festigkeitsklasse Gl 24h mit einer Normalkraftauslastung von 0,1

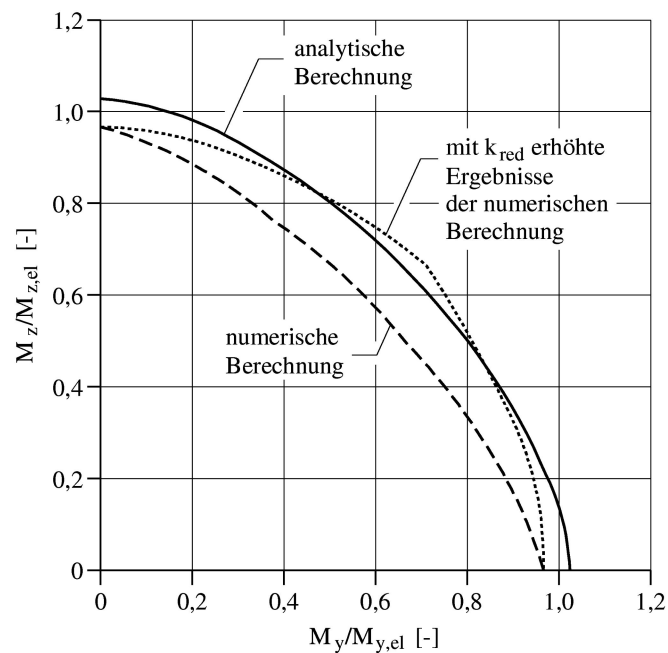


Bild 4.23: Analytisch und numerisch ermittelte sowie der durch den Beiwert k_{red} erhöhten numerischen Tragfähigkeit von Querschnitten der Festigkeitsklasse Gl 24h mit einer Normalkraftauslastung von 0,5

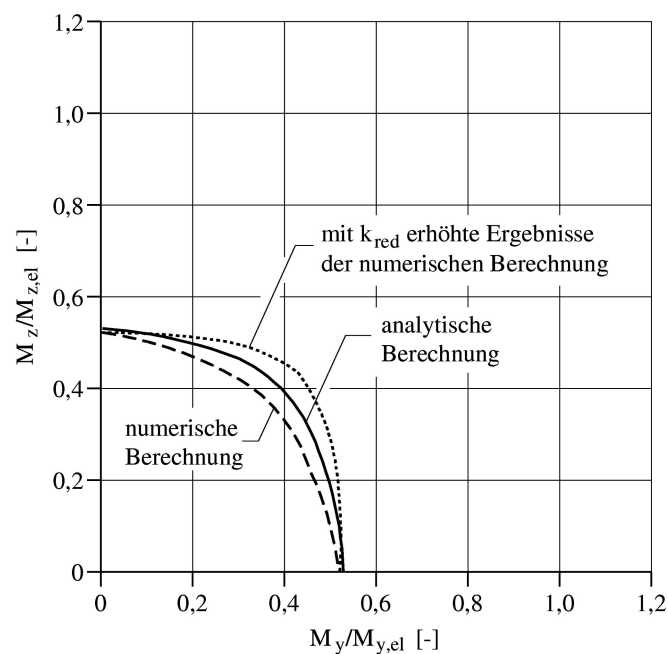


Bild 4.24: Analytisch und numerisch ermittelte sowie der durch den Beiwert k_{red} erhöhten numerischen Tragfähigkeit von Querschnitten der Festigkeitsklasse Gl 24h mit einer Normalkraftauslastung von 0,8

4.3.3.3 Untersuchung des sogenannten Höheneffekts

Nach EN 1995:2005-12 [6] ist die Zug- und die Biegefestigkeit von Voll- und Brettschichtholz aufgrund des Volumeneffekts anzupassen. Allerdings ist diese Anpassung auf die Höhe beschränkt. Es werden Referenzhöhen angegeben, für welche die Festigkeiten offenbar ermittelt wurden und somit ihre Gültigkeit besitzen. Bei kleineren Höhen dürfen die Festigkeiten bis zu einem angegebenen Grenzwert erhöht werden. Bei größeren Höhen braucht die Festigkeit nicht abgemindert zu werden. Die Referenzhöhe für Vollholz liegt bei 150 mm, die Referenzhöhe für Brettschichtholz bei 600 mm. Da die Zug- und Biegefestigkeit gleichermaßen angepasst werden, bleibt der zur Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit in Gl. (4.19) verwendete Hilfsverteilsparameter k_h unverändert. Die in EN 1995:2005-12 [6] angegebene Gleichung zur Anpassung der Zug- und Biegefestigkeiten lautet sinngemäß

$$f_{k,Vol} = \min \begin{cases} k_{max} \cdot f_k \\ \left(\frac{h_{ref}}{h} \right)^m \cdot f_k \end{cases} \quad \text{für } h < h_{ref}, \quad (4.55)$$

dabei ist der Faktor k_{max} , der eine Obergrenze für die Erhöhung der Festigkeiten angibt, für Brettschichtholz mit 1,1 und für Vollholz mit 1,3 festgelegt. Der Exponent m , der dem Kehrwert des Verteilsparameters k für die Höhe entspricht, wird für Brettschichtholz mit 0,2 und für Vollholz mit 0,1 angesetzt. Zum Vergleich ergeben die Kehrwerte der Hilfsverteilsparameter für die Festigkeitsklasse Gl 24h $1/k_h = 0,137$ und für die Festigkeitsklasse C24 $1/k_h = 0,227$. Die Gleichung für eine unbegrenzte Berücksichtigung des Höheneffekts kann wegen

$$S(\sigma_1) = S(\sigma_2) \quad (4.56)$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_u}{\sigma_M} \right)^{k_h} dz} = 1 - e^{-\int_{-h_2/2}^{h_2/2} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_u}{\sigma_M} \right)^{k_h} dz}$$

$$\Rightarrow \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_u}{\sigma_M} \right)^{k_h} dz = \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_u}{\sigma_M} \right)^{k_h} dz$$

$$\Rightarrow h_1 \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_M} \right)^{k_h} = h_2 \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_M} \right)^{k_h}$$

$$\Rightarrow h_1^{\frac{1}{k_h}} \cdot \sigma_1 = h_2^{\frac{1}{k_h}} \cdot \sigma_2$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{\frac{1}{k_h}} \cdot \sigma_2$$

mit

$$\sigma_1 = f_{k,Vol} \quad (4.57)$$

$$h_1 = h \quad (4.58)$$

$$\sigma_2 = f_k \quad (4.59)$$

$$h_2 = h_{ref} \quad (4.60)$$

durch

$$f_{k,Vol} = \left(\frac{h_{ref}}{h} \right)^{\frac{1}{k_h}} \cdot f_k \quad (4.61)$$

angegeben werden. Dieser Zusammenhang wird bei Colling [23] und Burger [16] genauer dargestellt. In Bild 4.25 sind die Zug- und die Biegefestigkeit jeweils in Abhängigkeit von der Höhe des Querschnitts nach EN 1995:2005-12 [6] (Gl. (4.55)) und unbegrenzt mit Hilfe des Hilfsverteilsparameters k_h (Gl. (4.61)) für die Festigkeitsklasse Gl 24h und in Bild 4.26 für die Festigkeitsklasse C24 dargestellt. Es zeigt sich, dass in dem vom Eurocode 5 [6] für die Berücksichtigung zugelassenen Bereich keine große Abweichung der Festigkeiten festzustellen ist.

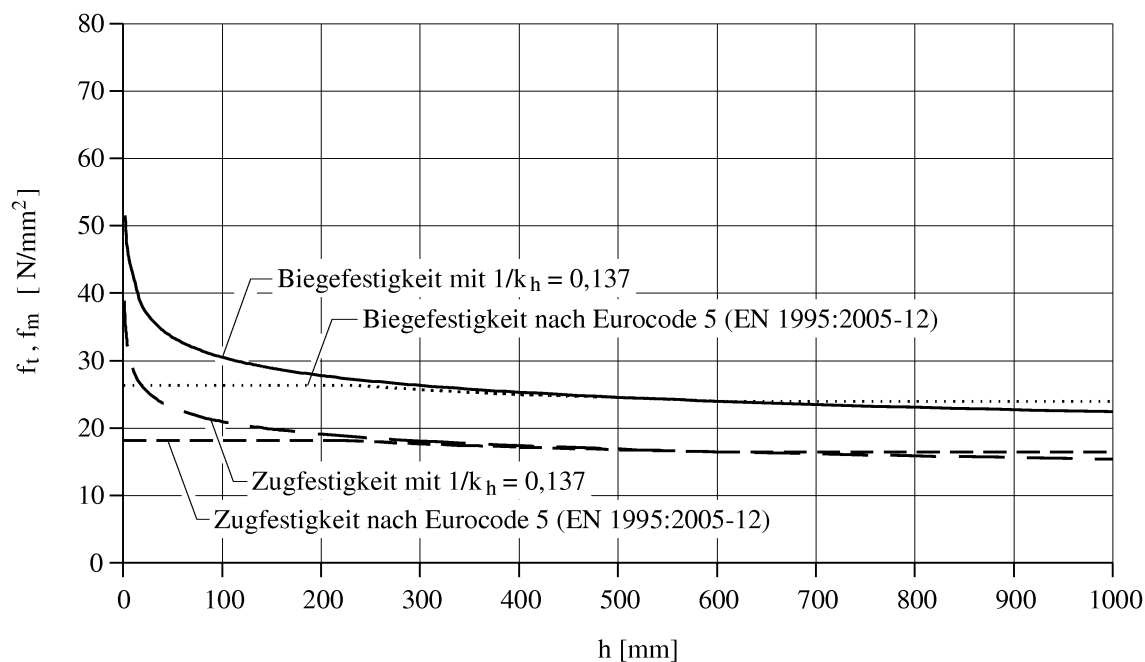


Bild 4.25: Zug- und Biegefestigkeit von Holz der Festigkeitsklasse Gl 24h unter Berücksichtigung des Höheneffekts

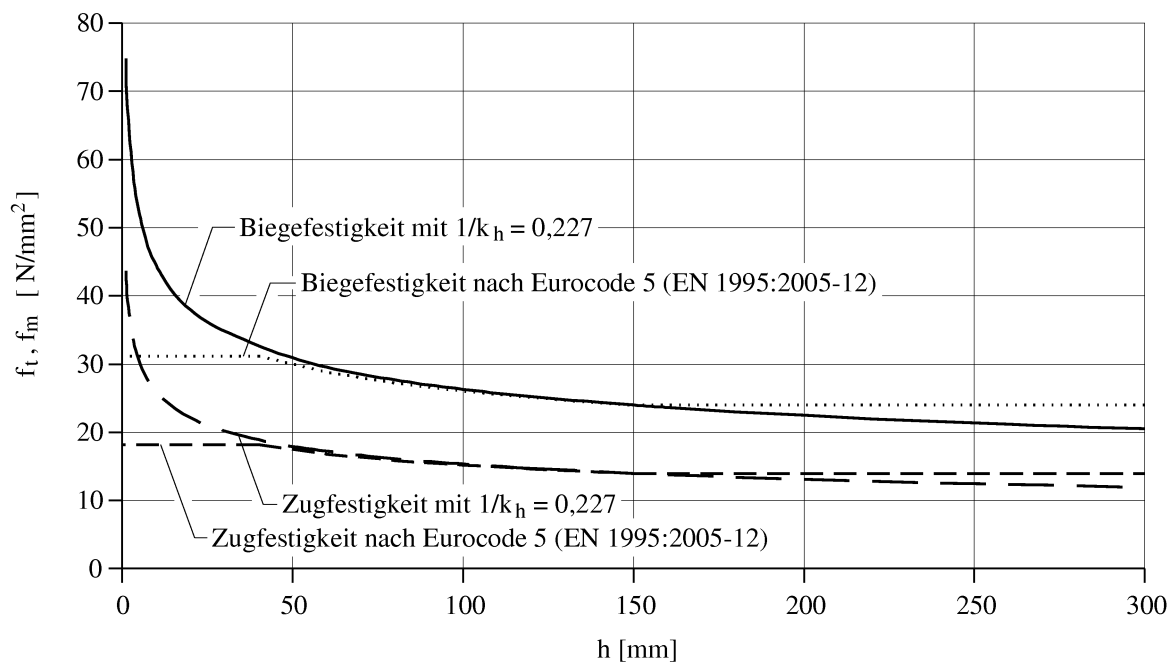


Bild 4.26: Zug- und Biegefestigkeit von Holz der Festigkeitsklasse C24 unter Berücksichtigung des Höheneffekts

5 Tragfähigkeit von Holzbauteilen

5.1 Allgemeines

Im Bauwesen gibt es eine Vielzahl von Bauteilen, die ein geometrisch nichtlineares Tragverhalten aufweisen. Im Holzbau zeichnen sich neben platten- und scheibenartigen Bauteilen, die nicht Gegenstand dieser Arbeit sind, vor allem Stäbe durch ein solches Verhalten aus, die durch Druck, Biegung oder einer Kombination von Druck und Biegung beansprucht werden. Die Stäbe werden durch Randbedingungen, d.h. die Art der Lagerung und Lasteinleitung, beeinflusst. Der einfachste druckbeanspruchte Stab ist der beidseitig gelenkig gelagerte durch eine konstante Druckkraft beanspruchte Stab, der Eulerstab II. Der einfachste biegebeanspruchte Stab ist der beidseitig gelenkig gabelgelagerte durch ein konstantes Moment beanspruchte Stab, der in Kap. 2.2 dargestellt und dessen Tragverhalten dort theoretisch hergeleitet wird. Für beide Stäbe existiert eine geschlossene analytische Lösung des Stabilitäts- und des Spannungsproblems. D.h. Verformungen und Beanspruchungen können für einen bestimmten Belastungsgrad analytisch ermittelt werden.

Für Stäbe mit anderen Randbedingungen können geschlossene analytische Lösungen nicht oder nur mit großem mathematischen Aufwand gefunden werden. Allerdings sind häufig die kritische Last und die Eigenform der Stäbe bekannt oder können abgeschätzt werden. Ist die Eigenform eines Stabes ähnlich der Eigenform der oben genannten Stäbe, kann für diesen Stab durch den Vergleich der kritischen Lasten eine Ersatzstablänge ermittelt werden. Mit Hilfe dieser Ersatzstablänge können dann für diesen Stab Verformungen und Beanspruchungen in Abhängigkeit vom Belastungsgrad in guter Näherung angegeben werden. Die beiden oben genannten Stäbe werden so als Ersatzstäbe verwendet. Den Bezug zum tatsächlich zu bemessenden Stab stellt die Knick- bzw. Kipp-Ersatzstablänge her.

Die in DIN 1052:04-08 angegebenen vereinfachten Bemessungsverfahren für das Knicken und das Kippen sind empirisch ermittelte Berechnungsmodelle zur Bemessung der Ersatzstäbe. Mit Hilfe der Beiwerte k_c für das Knicken und k_m für das Kippen werden dort die Tragfähigkeiten der Ersatzstäbe so weit abgemindert, dass eine sichere Bemessung mit linear ermittelten Schnittgrößen möglich ist.

Der Begriff Ersatzstabverfahren ist somit allein für die Verwendung der Ersatzstablängen zutreffend. Die Bemessung der Ersatzstäbe durch analytische, numerische und empirische Berechnungsmethoden ist Thema dieses Kapitels. Die Überprüfung der Verwendbarkeit der Ersatzstablängen für kipp- und biegedrillknickgefährdete Stäbe wird im nächsten Kapitel (Kap. 6) anhand eines Beispiels durchgeführt.

5.2 Modellbildung

Für die Ermittlung der Tragfähigkeit der Ersatzstäbe werden drei unabhängige Berechnungsmodelle verwendet:

- Die analytische Ermittlung der Traglast nach Stabtheorie, die in Kap. 2 ausführlich beschrieben wurde.
- Die numerische Ermittlung der Traglast mit Hilfe des FE-Programms ANSYS.
- Die Ermittlung der Traglast mit Hilfe der Beiwerte k_c und k_m , nach DIN 1052:2004-08, im folgenden k_c -Verfahren, k_m -Verfahren bzw. kombiniertes k_c - k_m -Verfahren genannt.

Bei den beiden erstgenannten Berechnungsmodellen kommt der Berücksichtigung der Imperfektionen sowie der Überprüfung der Annahmen zur Berücksichtigung der nicht-linearen Querschnittstragfähigkeit eine besondere Bedeutung zu. Bei dem k_c - und dem k_m -Verfahren sind Annahmen für die Imperfektionen und zur Querschnittstragfähigkeit bereits enthalten und können nicht variiert werden. Die Ergebnisse der drei Berechnungsmodelle werden dargestellt und miteinander verglichen.

5.2.1 Festigkeits- und Steifigkeitsannahmen

Als Arbeitslinie wird für alle numerischen Berechnungen die in Bild 4.1 dargestellte vereinfachte ideal-elastisch-plastische Arbeitslinie mit Sprödbruchversagen im Zugbereich verwendet. Außerdem sind für die Ermittlung der Traglasten von geometrisch und materiell nichtlinearen Bauteilen die Annahmen, die für Steifigkeiten und Festigkeiten getroffen werden, wesentlich.

Als charakteristische Steifigkeits- und Festigkeitswerte werden die für Vollholz der Festigkeitsklasse C24 nach EN 338:2003-09 und die für Brettschichtholz der Festigkeitsklasse Gl 24h nach EN 1194:1999-05 (jeweils mit den veränderten Werten für die Schubfestigkeit nach DIN 1052:2004-08) verwendet. Dabei werden für die Steifigkeitswerte die 5 Prozent-Quantilwerte genutzt, da hier nur Einzelbauteile untersucht werden. Die charakteristischen Werte werden für die analytische und numerische Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit durch den Teilsicherheitsbeiwert $\gamma_M = 1,3$ für das Material Holz geteilt. Bei dem k_c - und dem k_m -Verfahren ist dies nicht vorgesehen und wird daher hier auch nicht angewendet.

Im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit werden die Mittelwerte der Steifigkeitswerte ohne Abminderung durch den Teilsicherheitsbeiwert γ_M verwendet. Außerdem wird angenommen, dass die Lasten im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit um den Faktor 1,4 kleiner sind als die Lasten im Grenzzustand der Tragfähigkeit. Der Wert 1,4 steht dabei für einen Mittelwert der Teilsicherheitsbeiwerte $\gamma_G = 1,35$ für ständige und $\gamma_Q = 1,5$

für veränderliche Lasten.

Eine Ausnahme bildet hier der im Holzbau verwendete Beiwert k_{mod} . Er wird normalerweise verwendet, um die Festigkeitseigenschaften entsprechend der klimatischen Umgebungsbedingungen und der Klasse der Einwirkungsdauer abzumindern (siehe Kap. 3.2.3). Wie jedoch von Kessel, Schönhoff und Hörsting [41] gezeigt wird, führt die Verwendung dieses Beiwerts zu unterschiedlichen Traglasten für knickgefährdete Druckstäbe bei analytischer Berechnung und nach dem k_c -Verfahren. Um die Ergebnisse vergleichen zu können, wird daher hier mit dem fiktiven, in der Normung so nicht möglichen Wert $k_{mod} = 1,0$ gerechnet. Weil dadurch kein Festigkeitswert abgemindert und daher in allen hier untersuchten Verfahren mit den gleichen Festigkeitswerten gerechnet wird, stellt dies eine zulässige Vereinfachung dar.

5.2.2 Das FE-Modell

Während sowohl auf die analytische Berechnung, als auch auf die Berechnung nach den vereinfachten Verfahren in den folgenden Kapiteln jeweils konkret eingegangen wird, soll zunächst das FE-Modell genauer beschrieben werden, da es für alle untersuchten Bauteile grundsätzlich gleichartig ist.

Für die Generierung der jeweils genannten Holzbauteile werden die von dem Programm ANSYS zur Verfügung gestellten Elemente BEAM188 verwendet. Diese Elemente können durch die Einführung zusätzlicher interner Integrationspunkte über Höhe und Breite in beliebig viele Sektionen unterteilt werden. Dadurch ist es möglich den Elementen eine Arbeitslinie zuzuordnen. Hier wird die ideal-elastisch-plastische Arbeitslinie (wie auch schon in Kap. 4 zur Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit) nach Bild 4.1 verwendet, um das Material Brettschichtholz der Festigkeitsklasse Gl 24h zu simulieren.

Beim Brettschichtholz der Festigkeitsklasse Gl 24h ist die Biegezugfestigkeit gleich der Druckfestigkeit. Daher kann hier das Modell ohne weitere Maßnahmen verwendet werden. Die äußeren Beanspruchungen, beim Druckstab die zentrische Normalkraft, beim kippgefährdeten Biegestab das Moment um die starke Achse und beim biegedrillknickgefährdeten Biegestab die exzentrische Normalkraft, werden weggesteuert aufgebracht. D.h. die Normalkräfte werden durch eine Zwangsverschiebung und die Momente durch eine Zwangsverdrehung des Endquerschnitts erzeugt. Die Versagenskriterien sind entweder das Erreichen der Zugfestigkeit an einer Stelle des Querschnitts oder das Versagen des gesamten Tragwerks durch Überschreiten der Bauteiltragfähigkeit. Bei den kippenden Biegestäben wird zusätzlich überprüft, ob an einer Stelle des Bauteils die Schubfestigkeit erreicht wird. Dies geschieht durch eine Nachlaufrechnung, bei der die Schubspannung aus dem größten vorhandenen Torsionsmoment ermittelt wird. Überprüft wird auch, ob die Druckdehnungen übermäßig groß werden (über 1 Prozent), was jedoch, das sei bereits vorweggenommen, in keinem der untersuchten Fälle maßgebend wird.

Beim Vollholz der Festigkeitsklasse C24 ist die Biegezugfestigkeit größer als die Druck-

festigkeit. Da das Programm ANSYS für diesen Fall kein Materialmodell anbietet, werden die Bauteile hier zunächst durch eine Druck-Vorspannung beansprucht, bevor die eigentlichen äußeren Beanspruchungen weggesteuert aufgebracht werden. Als Versagenskriterien werden die gleichen Kennwerte überprüft wie beim Brettschichtholz-Modell.

5.2.3 Imperfektionen

Bei der Bemessung von Bauteilen, die durch Knicken, Kippen oder Biegedrillknicken gefährdet sind, ist die richtige Annahme der Imperfektionen von grosser Bedeutung. Imperfektionen haben unterschiedliche Ursachen wie materielle Abweichungen von der Idealform und Ungenauigkeiten beim Einbau. Imperfektionen können bei der Bemessung nur idealisiert berücksichtigt werden. Die wichtigsten Imperfektionen für die hier untersuchten Bauteile sind:

- die Vorkrümmung,
- die Verdrillung des Querschnitts,
- die Stabschiefstellung und
- die exzentrische Lasteinleitung.

Die Vorkrümmungen um die schwache Achse werden sinusförmig angenommen. Sie ist die wichtigste Imperfektion für die hier untersuchten Bauteile. Eine Vorkrümmung um die starke Achse hat keinen wesentlichen Einfluss auf das Tragverhalten von knick-, kipp- oder biegedrillknickgefährdeten Bauteilen. Eine stichprobenartige Untersuchung dieser Bauteile mit und ohne Vorkrümmung um die starke Achse ergab vernachlässigbar kleine Unterschiede in der Traglast.

Die Verdrillung des Querschnitts wird hier aus dem gleichen Grund wie die Vorkrümmung sinusförmig angenommen. Neben der Verdrillung ist auch eine über die Länge des Stabes konstante Verdrehung des Querschnitts denkbar. Diese Art der Verdrehung ist auch als Schiefstellung des Querschnitts zu bezeichnen. Eine Untersuchung der Schiefstellung des Querschnitts wird hier nicht vorgenommen. Es wird vereinfachend angenommen, dass das Tragverhalten bei Annahme einer über die Länge des Stabes konstanten Querschnittsverdrehung nicht wesentlich von dem bei Annahme einer sinusförmigen Querschnittsverdrillung abweicht.

Die Stabschiefstellung hat keinen Einfluss auf das Tragverhalten der hier untersuchten Bauteile. Einzig bei der Ermittlung der Auflagerkräfte muss sie berücksichtigt werden. Die Bemessung der Auflager von Stäben ist nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Die ungewollte exzentrische Einleitung von Normalkräften in einen Druckstab führt zu einer zusätzlichen Momentenbeanspruchung des Stabs. Der Einfluss dieser Imperfektion auf knick- und biegedrillknickgefährdete Bauteile wird im Folgenden untersucht.

5.3 Tragfähigkeit von druckbeanspruchten Holzbauteilen

5.3.1 Allgemeines

Zum Tragverhalten von Druckstäben wurden erstmals von Euler (1707 - 1783) wissenschaftliche Untersuchungen angestellt. Er ermittelte die sogenannte kritische Last, die die Tragfähigkeit von Druckstäben begrenzt. Bei Erreichen der kritischen Last geht der Druckstab vom stabilen in den indifferenten Zustand über, der dadurch gekennzeichnet ist, dass es für eine Beanspruchung mehrere Verformungszustände gibt. Lange Zeit wurde angenommen, dass die Tragfähigkeit von Druckstäben ausschließlich durch die Eulerhyperbel und die Druckfestigkeit begrenzt wird. Tetmajer [65] führte Ende des 19. Jahrhunderts umfangreiche Untersuchungen an Druckstäben aus schweizer Bauholz durch. Dabei stellte er fest, dass diese Annahme für kurze, gedrungene Druckstäbe 'auf der unsicheren Seite' liegt. Er entwickelte eine Näherungsgleichung für die Tragfähigkeit solcher Druckstäbe, indem er eine Tangente an die Eulerhyperbel legte. Mit dieser Näherung lag er jedoch stark auf der sicheren Seite. Möhler gibt in seiner Arbeit 1942 [47] Traglasten für Holzdruckstäbe auf der Grundlage der sogenannten Elastizitätstheorie II. Ordnung an, mit deren Hilfe das vereinfachte Verfahren für DIN 1052 mit den sogenannten ω -Zahlen entwickelt wurde.

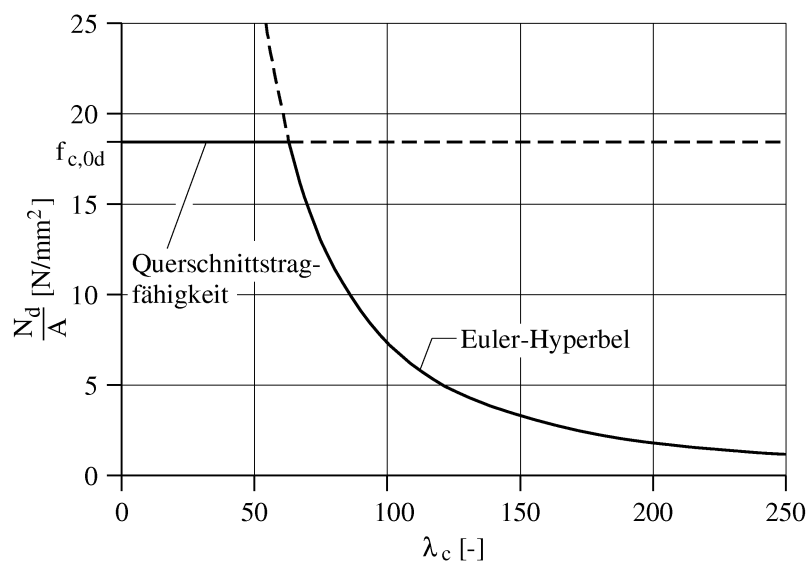


Bild 5.1: Traglast eines quasi-perfekten Druckstabes aus Brettschichtholz

Hug [37] ermittelt 1971 erstmals Traglasten für Druckstäbe aus Holz auf der Grundlage der Plastizitätstheorie von Hartmann [42]. Aufgrund der Arbeiten von Kersken-Bradley 1981 [38] und Buchanan 1984 [14] zur Querschnittstragfähigkeit von Holz unter Berücksichtigung des Plastizierens im Druckbereich wird 1994 die quadratische Normalkraft-Momenten-Interaktion

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} \leq 1 \quad (5.1)$$

in den Eurocode 5 und später (2004) in DIN 1052 aufgenommen. Dadurch kann das Plastizieren beim Nachweis von Druckstäben berücksichtigt werden, indem die Beanspruchungen analytisch nach Kap. 2 ermittelt und dem vereinfachten Widerstand des plastizierenden Materials gegenübergestellt werden. Ehlbeck und Blaß entwickeln 1987 ein FE-Modell für den Druckstab [27] und [10], bei dem mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode den einzelnen Elementen die zuvor statistisch erhobenen mechanischen Eigenschaften von Bauholz zugeordnet werden. Dabei wird auch das Plastizieren im Druckbereich berücksichtigt. Die statistische Auswertung einer großen Anzahl von Traglastberechnungen, die mit Hilfe dieses Modells durchgeführt wurden, ergab die Bemessungsgleichungen für das k_c -Verfahren der aktuellen Fassungen des Eurocodes 5 sowie der DIN 1052.

Die Traglast von Holzdruckstäben ist abhängig von den Festigkeits- und Steifigkeitswerten des Materials und im wesentlichen von der Knick-Schlankheit

$$\lambda_c = \frac{\ell}{i_z} = \frac{\ell}{\sqrt{\frac{I_z}{A}}} \quad \text{mit dem Trägheitsradius } i_z, \quad (5.2)$$

die bei den im Holzbau üblichen Rechteckquerschnitten das Verhältnis der Querschnittsbreite in Richtung der zu untersuchenden Knickrichtung und der Stablänge angibt. Die Tragfähigkeit von Stäben mit einer kleinen Knick-Schlankheit, also gedrunenen Stäben, wird wesentlich durch die Festigkeitswerte, die Tragfähigkeit von Stäben mit einer großen Knick-Schlankheit, also schlanken Stäben, wird wesentlich durch die Steifigkeitswerte des Materials begrenzt.

5.3.2 Analytische Ermittlung der Traglast

Die Traglast von knickgefährdeten Druckstäben wird analytisch für Brettschichtholz und Vollholz wie folgt ermittelt: Aus Gl. (2.199) folgt unter Annahme einer Momentenbeanspruchung $M_y = \alpha_M \equiv 0$ und einer zentrisch angreifenden Normalkraft N_x die Gleichung

$$M_z = \frac{N_x \cdot v_0}{1 - \alpha_N}, \quad (5.3)$$

die mit $N_x/A = \sigma_c$ und $M_z/W_z = \sigma_m$ eingesetzt in Gl. (5.1) unter Voraussetzung des Erreichens des Bemessungswertes der Traglast $N_{nl,d}$ zu der Gleichung

$$\left(\frac{N_{nl,d}}{A \cdot f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{N_{nl,d} \cdot v_0}{(1 - \alpha_N) \cdot W_z \cdot f_{m,d}} = 1 \quad (5.4)$$

führt, die nach Auflösung nach N_{nl} zu der kubischen Gleichung

$$0 = N_{nl,d}^3 - N_{nl,d}^2 \cdot N_{crit} - N_{nl,d} \cdot A^2 \cdot f_{c,0,d}^2 \cdot \left(1 + \frac{e \cdot N_{crit}}{W_z \cdot f_{m,z}}\right) + A^2 \cdot f_{c,0,d}^2 \cdot N_{crit} \quad (5.5)$$

umgeformt werden kann, dessen sinnvolle Lösung die Traglast $N_{nl,d}$ ergibt.

5.3.3 Traglast nach dem k_c -Verfahren

Die Traglast nach dem k_c -Verfahren ergibt sich gemäß EN 1995:2005-12 und DIN 1052:2004-08 unter Voraussetzung des Erreichens des Bemessungswertes der Traglast $N_{ErSt,d}$ aus der Gleichung

$$\frac{N_{ErSt,d}}{k_c \cdot A \cdot f_{c,0,d}} = 1 \quad (5.6)$$

mit den Berechnungsgleichungen für den Beiwert k_c

$$\lambda_c = \sqrt{12} \cdot \frac{\ell_{c,ef}}{h} \quad (5.7)$$

$$\lambda_{rel,c} = \frac{\lambda_c}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} \quad (5.8)$$

$$k = \frac{1}{2} \cdot [1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,c} - 0,3) + \lambda_{rel,c}^2] \quad (5.9)$$

$$k_c = \min \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{rel,c}^2}} \end{cases} \quad (5.10)$$

unter der Voraussetzung, dass Rechteckquerschnitte verwendet werden, zu

$$N_{ErSt,d} = k_c \cdot f_{c,0,d} \cdot A. \quad (5.11)$$

Dabei ist die Knick-Ersatzstablänge $\ell_{c,ef}$ durch

$$\ell_{c,ef} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E_{0,05} \cdot I_z}{N_{crit} \cdot \gamma_M}} \quad (5.12)$$

zu ermitteln.

5.3.4 Druckstäbe aus Brettschichtholz

Im Folgenden werden die Traglasten für einen Druckstab aus Brettschichtholz nach den oben genannten Berechnungs-Modellen (k_c -Verfahren, analytische und numerische Berechnung) in Abhängigkeit von der Knick-Schlankheit λ_c ermittelt und in Diagrammen gegenübergestellt. Dabei werden die Bemessungswerte der Festigkeiten und Steifigkeiten für Brettschichtholz Gl 24h nach den Vorgaben in DIN 1052 in Verbindung mit den charakteristischen Werte nach DIN EN 1194:1999-05 verwendet.

In Bild 5.2 sind die Traglasten, normiert auf die Querschnittsfläche, nach den drei Berechnungsmethoden über der Knick-Schlankheit dargestellt. Dabei wird bei der numerischen und der analytischen Berechnung die Imperfektion $v_0 = \ell/400$ gesetzt, wie es nach den Normen DIN 1052:2004-08 und EN 1995:2005-12 vorgeschrieben ist. Außerdem wird der Beiwert des k_c -Verfahrens $\beta_c = 0,1$ für Brettschichtholz verwendet. Es zeigt sich, dass die Traglast nach dem k_c -Verfahren stärker von den Traglasten nach den beiden anderen Verfahren abweicht. Der Beiwert β_c geht nach Blaß [11] für die korrekte Berücksichtigung der Vorkrümmungsamplitude des Druckstabes in die Berechnung ein. Für Brettschichtholz wird danach eine Imperfektion von $v_0 = \ell/500$ angenommen. Eine wirklich gute Übereinstimmung der Ergebnisse nach den Berechnungsmethoden ergibt sich jedoch erst dann, wenn bei der numerischen und analytischen Berechnung für die Vorkrümmung eine Amplitude von $v_0 = \ell/800$ angenommen wird. Zur Veranschaulichung dieses Zusammenhangs ist in Bild 5.3 der Quotient r_N aus der Berechnung nach dem k_c -Verfahren und nach analytischer Berechnung über der Knick-Schlankheit für verschiedene Imperfektionsannahmen dargestellt.

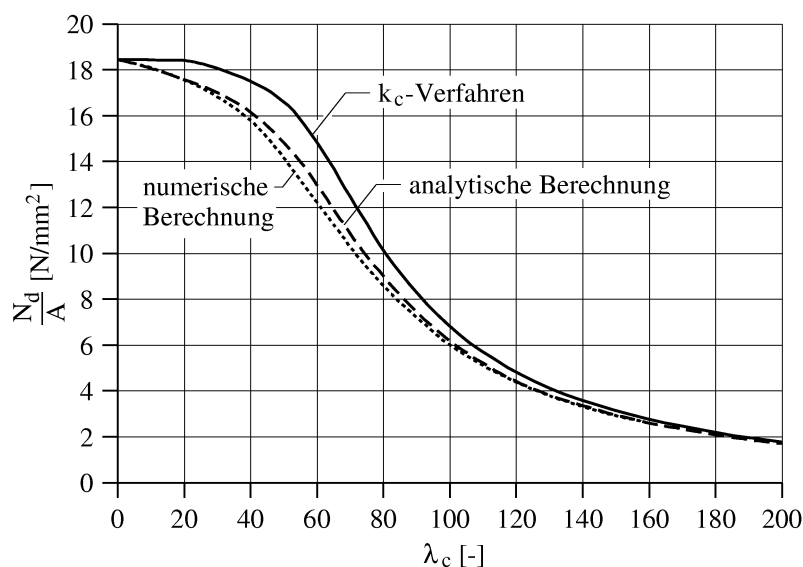


Bild 5.2: Traglast eines Druckstabes aus Brettschichtholz (Gl 24h) in Abhängigkeit von der Schlankheit nach verschiedenen Berechnungsmethoden

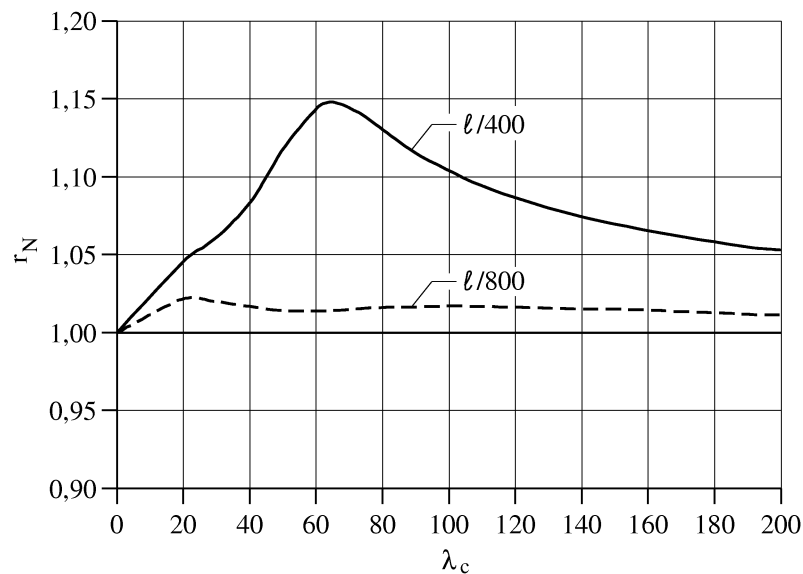


Bild 5.3: Quotient r_N in Abhängigkeit von der Schlankheit für verschiedene Imperfektionsannahmen

Die Abweichungen der Ergebnisse der numerischen und der analytischen Berechnungen sind gering. Dennoch sei hier darauf hingewiesen, dass das Versagen des Druckstabes bei der FE-Analyse nicht durch das Erreichen der Zugfestigkeit sondern durch das Erreichen der Bauteiltragfähigkeit hervorgerufen wird, die abhängig ist von der Steifigkeit und der Geometrie des Druckstabes. Bei Erreichen der Bauteiltragfähigkeit tritt nicht sofort das Versagen des Materials ein, sondern der Stab geht in einen indifferenten Gleichgewichtszustand über. Jede zusätzliche Beanspruchung führt zu großen Verformungen, die dann zwangsläufig zum Versagen des Materials führen, da die Dehnungen im Zugbereich so groß werden, dass die Fasern letztlich reißen. In Bild 5.4 ist eine typische Last-Verformungs-Kurve dargestellt, bei der die Normalkraft über der senkrecht zur Stabachse ermittelten Verformung v angetragen ist.

Zur Veranschaulichung des Einflusses der Berücksichtigung des Plastizierens des Druckbereichs sind in Bild 5.5 die bei analytischer Berechnung erreichbaren Tragfähigkeiten des Druckstabes jeweils einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung des Plastizierens dargestellt. Bei der Ermittlung der Ergebnisse wurde jeweils einmal der lineare und einmal der quadratische Ansatz der Momenten-Normalkraft-Interaktion zu Grunde gelegt.

5.3.5 Druckstäbe aus Vollholz

Für Druckstäbe aus Vollholz wird die gleiche Untersuchung mit Hilfe der drei Berechnungsverfahren, k_c -Verfahren, analytische und numerische Berechnung, durchgeführt wie beim Brettschichtholz. In Bild 5.6 sind die Traglasten, wiederum normiert auf den Querschnitt, nach den drei Berechnungsverfahren in Abhängigkeit von der Schlankheit darge-

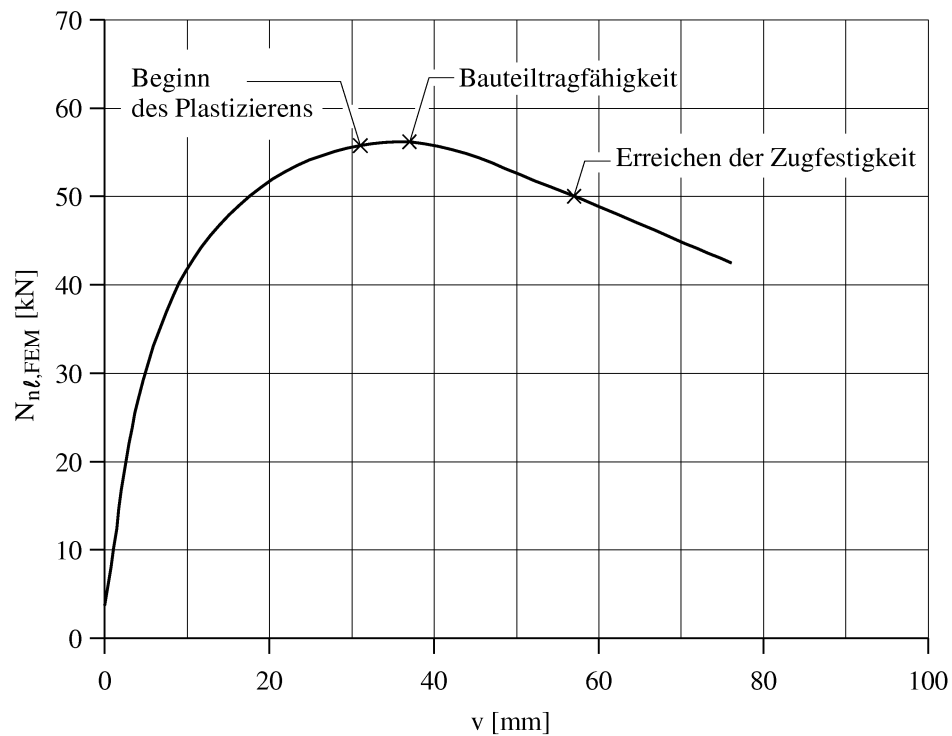


Bild 5.4: Last-Verformungskurve eines Druckstabes aus Brettschichtholz (Gl 24h)

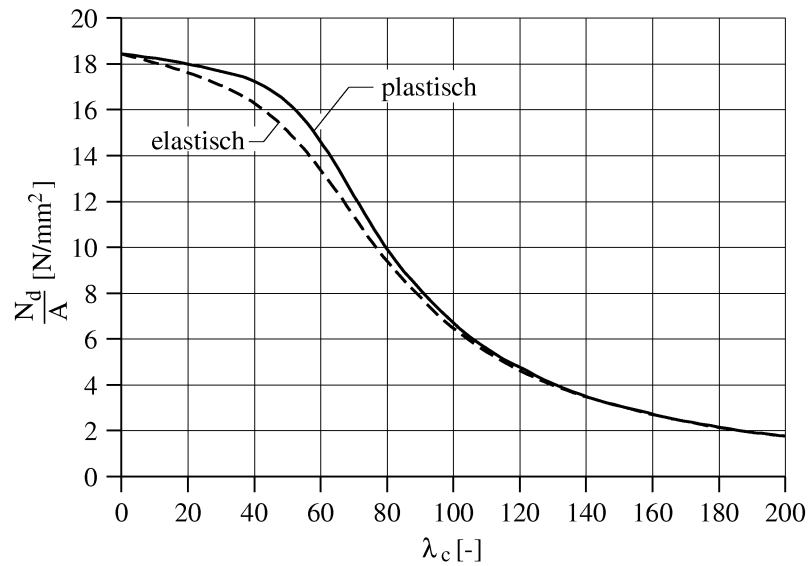


Bild 5.5: Traglast eines Druckstabes aus Brettschichtholz (Gl 24h) in Abhängigkeit von der Schlankheit mit und ohne Berücksichtigung des Plastizierens im Druckbereich

stellt.

Es wird eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse nach den drei Berechnungsmethoden sichtbar. Die numerisch ermittelten Traglasten sind wiederum etwas kleiner als die analy-

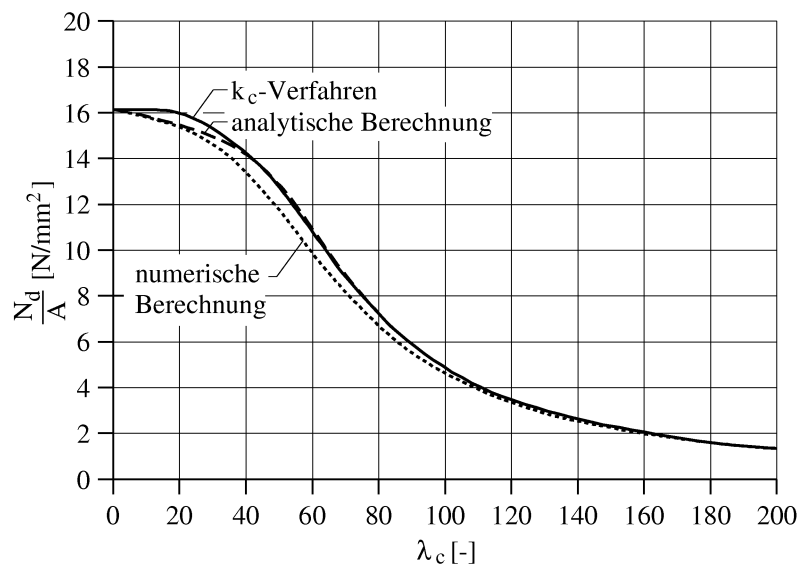


Bild 5.6: Traglast eines Druckstabes aus Vollholz (C24) in Abhängigkeit von der Schlankheit nach verschiedenen Berechnungsmethoden

tisch ermittelten. Der Grund ist auch hier, dass für die Traglast nach der FE-Methode das Bauteilversagen und nicht das Erreichen der Zugfestigkeit maßgebend wird.

Für das k_c -Verfahren wurde hier der Beiwert $\beta_c = 0,2$, wie nach den Normen DIN 1052:2004-08 und EN 1995:2005-12 vorgeschrieben, für die Imperfektionsannahme angewendet. Die Übereinstimmung mit dem analytisch ermittelten Ergebnis ist gut. Zur Veranschaulichung ist in Bild 5.7 der oben bereits beschriebene Quotient r_N diesmal für das Vollholz (C24) in Abhängigkeit von der Schlankheit dargestellt.

In Bild 5.8 sind die analytisch ermittelten Traglasten jeweils einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung des Plastizierens im Druckbereich abgebildet. Obwohl die Druckfestigkeit kleiner als die Biegezugfestigkeit ist, ergeben sich dennoch ähnliche Unterschiede wie beim Brettschichtholz (Gl 24h), bei dem Druck- und Biegezugfestigkeit gleich groß angenommen werden.

5.3.6 Einfluss der Imperfektion 'exzentrische Lasteinleitung'

Neben der Vorkrümmung hat eine weitere, hier bisher nicht untersuchte Imperfektion einen Einfluss auf die Tragfähigkeit von Druckstäben: die exzentrische Lasteinleitung. Nach den Normen DIN 1052:2004-08 und EN 1995:2005-12 ist eine Annahme dieser Imperfektion nicht zu berücksichtigen. Dennoch sollte jedem im Bauwesen Tätigen klar sein, dass diese Imperfektion immer existent ist. Die exzentrische Lasteinleitung sorgt dafür, dass auch an den Stabenden eine Momentenbeanspruchung vorhanden ist. In Bild 5.9 ist das statische Modell für einen Druckstab mit exzentrischer Lasteinleitung abgebildet.

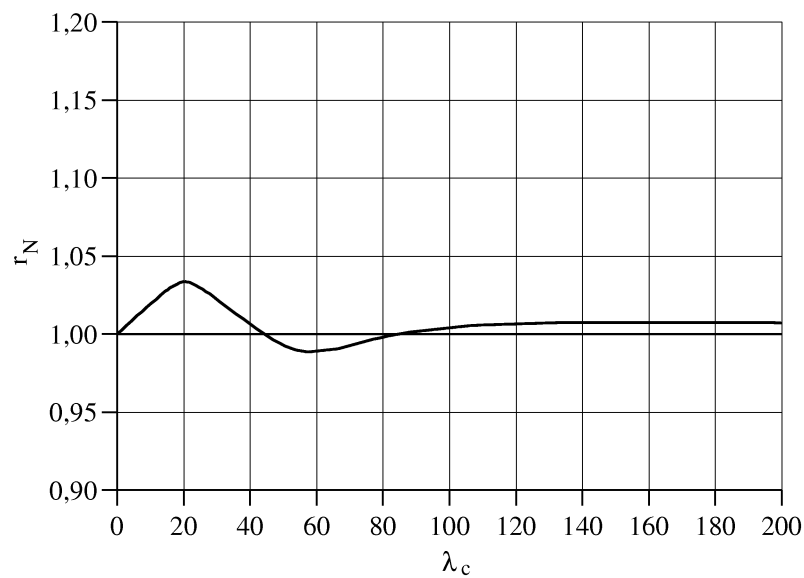


Bild 5.7: Quotient r_N für C24 in Abhängigkeit von der Schlankheit für die Imperfektionsannahme $v_0 = \ell/400$

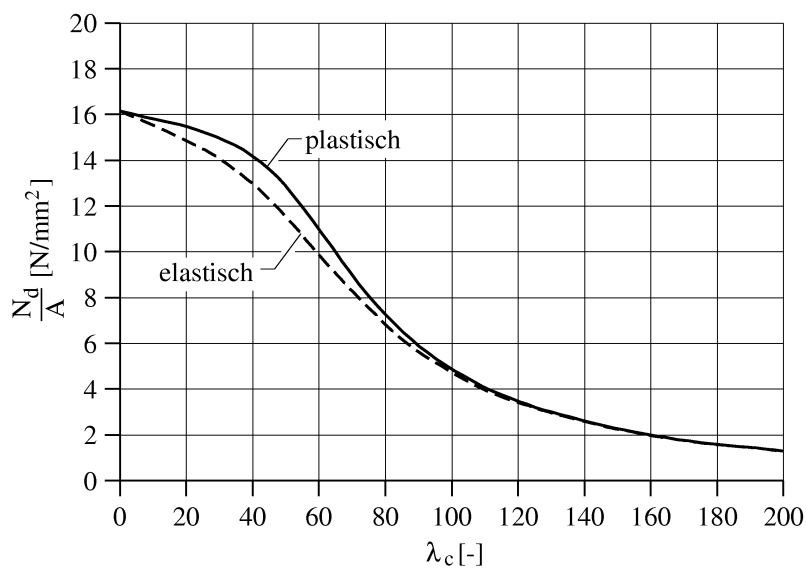


Bild 5.8: Traglast eines Druckstabes aus Vollholz (C24) in Abhängigkeit von der Schlankheit mit und ohne Berücksichtigung des Plastizierens im Druckbereich

Kessel et al. [41] zeigen, dass sich die Bemessungsgleichung für den exzentrischen Druckstab zur Ermittlung der Traglast zu der kubischen Gleichung

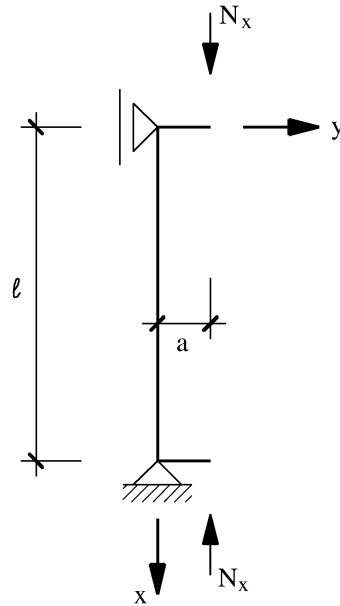


Bild 5.9: Statisches Modell des exzentrisch gedrückten knickgefährdeten Druckstabs

$$0 = N_{nl,d}^3 - N_{nl,d}^2 \cdot \left(N_{crit} - \frac{\delta \cdot a \cdot A^2 \cdot f_{c,0,d}^2}{W_z \cdot f_m} \right) - \quad (5.13)$$

$$N_{nl,d} \cdot A^2 \cdot f_{c,0,d}^2 \cdot \left(1 + \frac{(v_0 + a) \cdot N_{crit}}{W_z \cdot f_{m,z}} \right) + A^2 \cdot f_{c,0,d}^2 \cdot N_{crit}$$

mit den Parametern a für die Größe der Exzentrizität (siehe Bild 5.9) und $\delta = 0,234$ umformen lässt. In Bild 5.10 sind die analytisch ermittelten Traglasten einmal mit und einmal ohne Annahme einer exzentrischen Lasteinleitung dargestellt (hier für Brettschichtholz (Gl 24h), für Vollholz (C24) ergeben sich gleichartige Traglastkurven). Die Größe der Exzentrizität wurde dabei zu $a = b/60$ gesetzt. Das entspricht den Annahmen, die bei den Knickzahlen, den sogenannten ω -Werten, der Ausgabe von 1988 der DIN 1052 nach [48] zu Grunde liegen. Dabei steht b für die Breite bzw. die Ausdehnung des Rechteckquerschnitts, in deren Richtung ein Knicken des Bauteils zu erwarten ist. Es wird deutlich, dass die Berücksichtigung der exzentrischen Lasteinleitung vor allem die Tragfähigkeit von kurzen, gedrunenen Druckstäben negativ beeinflusst. Die zusätzliche Beanspruchung aus exzentrischer Lasteinleitung bewirkt bei allen Bauteilen eine zusätzliche Beanspruchung, nicht bei solchen mit geometrisch nichtlinearem Tragverhalten. Diese Imperfektion ist also eher eine allgemein den Holzbau als eine speziell das geometrisch nichtlineare Tragverhalten betreffende, jedenfalls sofern der Stab gegen Verdrillen gesichert ist. Dabei ist zu beachten, dass eine Exzentrizität der Lasteinleitung von $a = b/60$ die Tragfähigkeit um bis zu 5 Prozent abmindert.

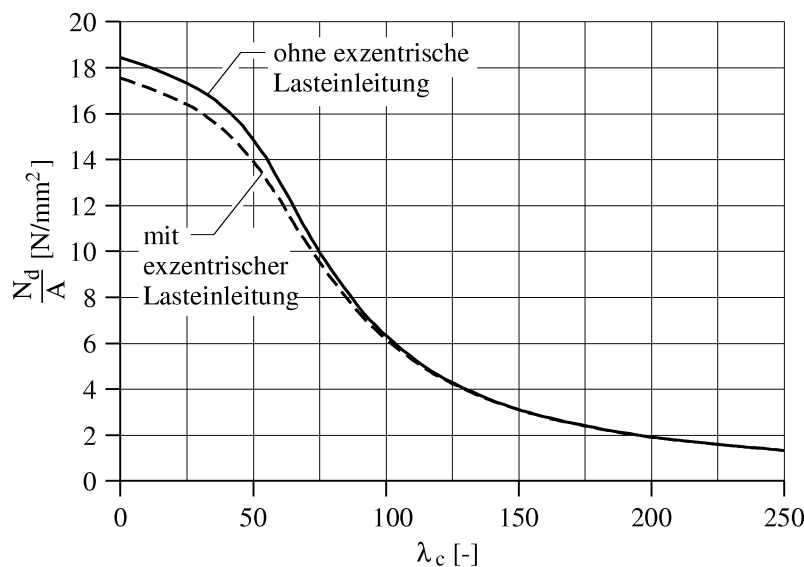


Bild 5.10: Traglast eines Druckstabes aus Brettschichtholz in Abhängigkeit von der Schlankheit mit und ohne exzentrische Lasteinleitung $a = b/60$

5.3.7 Verformungen

Im Grenzzustand der Tragfähigkeit treten bei sehr schlanken Druckstäben teilweise erhebliche Verformungen senkrecht zur Stabachse auf. Im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit sind die Verformungen jedoch wesentlich geringer. Denn zum einen wird für die Steifigkeit der Druckstäbe bei der Bemessung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit nach den Normen DIN 1052:2004-08 und EN 1995:2005-12 der nicht durch den Sicherheitsbeiwert $\gamma_M = 1,3$ für das Material Holz geteilte Mittelwert angenommen. Zum anderen darf die Traglast durch den gemittelten Sicherheitsbeiwert $\gamma_F = 1,4$ für die Einwirkungen abgemindert werden. Für Brettschichtholz sind in Bild 5.11 und für Vollholz in Bild A.4 (im Anhang in Kap. A.3) die numerisch ermittelten Verformungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit jeweils den zugehörigen Verformungen auf charakteristischem Beanspruchungsniveau in Abhängigkeit von der Knick-Schlankheit λ_c gegenübergestellt. Die Verformungen v in y -Richtung werden als Verhältniswert v/ℓ in Abhängigkeit von der Länge ℓ des Druckstabes abgebildet.

Die Darstellung macht deutlich, dass die Verformungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit mit zunehmender Schlankheit stetig ansteigen. Auf dem zugehörigen charakteristischen Beanspruchungsniveau nähern sich die Verformungen mit zunehmender Schlankheit jedoch asymptotisch einem bestimmten Wert (etwa $1/1000$ beim Brettschichtholz und etwa $1/750$ beim Vollholz), der weit unter dem Bereich liegt, der nach DIN 1052:2004-08 für trägerartige Bauteile erlaubt ist. In der Normung ist zwar kein Grenzwert für die Verformung von Druckstäben im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit angegeben, aber der Vergleich mit den Grenzwerten für trägerartige Bauteile (DIN 1052:2004-08: Kap. 9.2) zeigt, dass die Verformungen auf dem zur Traglast gehörigen charakteristischen Beanspruchungsniveau sehr klein sind.

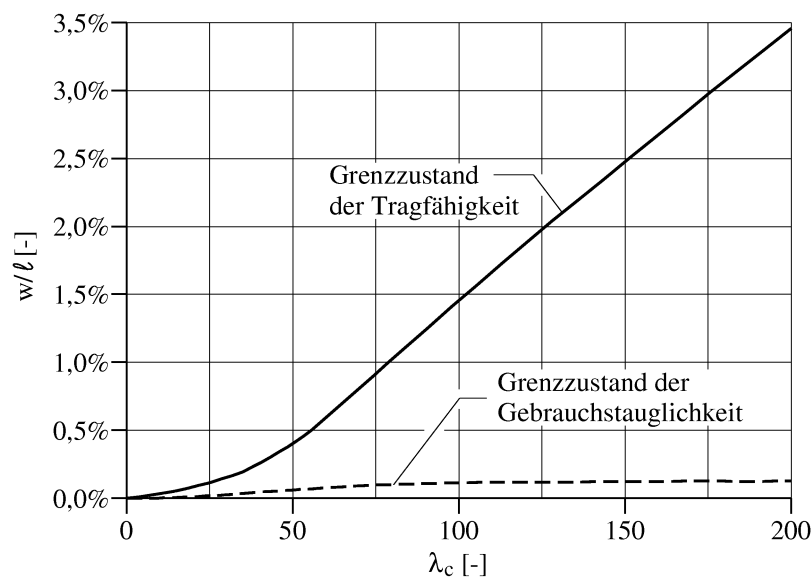


Bild 5.11: Verformungen von Druckstäben aus Brettschichtholz (Gl 24h) im Grenzzustand der Tragfähigkeit und auf dem zugehörigen charakteristischen Beanspruchungsniveau

5.3.8 Erkenntnisse der Untersuchung

Die Ergebnisse der drei verschiedenen Berechnungsmethoden weichen nicht wesentlich voneinander ab, so dass davon ausgegangen werden kann, dass alle drei zur Bemessung gut geeignet sind. Die größten Abweichungen treten beim k_c -Verfahren und dort nur beim Brettschichtholz auf. Diese Abweichungen sind jedoch offensichtlich auf die Annahme der Imperfektionen zurückzuführen. Die für die numerische und die analytische Bemessung in den Normen (DIN 1052:2004-08 und EN 1995:2005-12) vorgeschriebene Amplitude für die Vorkrümmung der Druckstäbe ist mit $v_0 = \ell/400$ offenbar doppelt so groß, wie die bei der Ermittlung des k_c -Verfahrens angenommene. Um ein geschlossenes Bemessungskonzept zu erhalten, sollten diese Werte aneinander angepasst werden.

Die Annahme für die Querschnittstragfähigkeit, die mit der parabelförmigen Normalkraft-Momenten-Interaktion nach Gl. (5.1) gegenüber der analytisch ermittelten nach Gl. (4.12) und Gl. (4.16) (siehe auch Bild 5.12) zunächst stark auf der sicheren Seite zu liegen scheint, erweist sich für die Bemessung von knickgefährdeten Druckstäben als sehr passend. Die analytisch ermittelte Tragfähigkeit, die diese parabelförmige Annahme berücksichtigt, ist nicht wie eventuell erwartet, kleiner sondern etwas größer als die numerisch ermittelte Tragfähigkeit, welche die tatsächliche Querschnittstragfähigkeit wesentlich genauer berücksichtigt. Durch das Plastizieren des sich biegenden Stabes wird eine größere Krümmung erzeugt als unter Annahme eines linearen Materialverhaltens. Offenbar wird die effektive Steifigkeit durch das Plastizieren im Druckbereich des Bauteils gegenüber der analytischen Berechnung, bei der die zusätzlichen Beanspruchungen unter Annahme eines linearen Materialverhaltens ermittelt werden, so stark abgemindert, dass die Reserve

durch die größere tatsächliche Querschnittstragfähigkeit gegenüber der parabelförmigen Annahme bei der analytischen Berechnung komplett aufgebraucht wird. Daher kann angenommen werden, dass die parabelförmige Näherung für die Querschnittstragfähigkeit eine gute Näherung für die analytische Berechnung knickgefährdeter Stäbe darstellt.

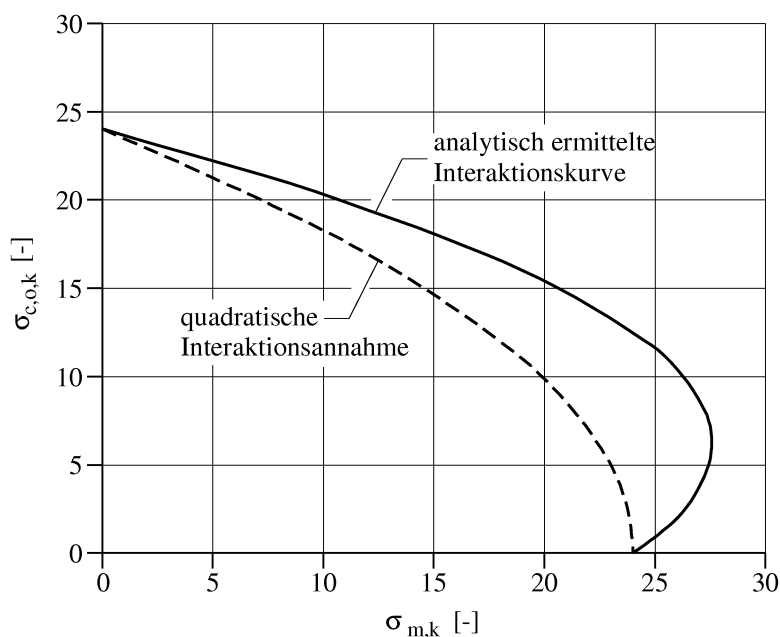


Bild 5.12: Analytisch ermittelte N-M-Interaktion im Vergleich zur quadratischen Interaktionsannahme nach EN 1995:2005-12 bzw. DIN 1052:2004-08

5.4 Tragfähigkeit von biegebeanspruchten Holzbauteilen

5.4.1 Allgemeines

Das nichtlineare Tragverhalten von Biegestäben wird zeitgleich von Prandtl [58] und Mitchell [51] erstmals wissenschaftlich behandelt. Sie beschreiben das Kippen (siehe auch Kap. 2.2), das vor allem bei Biegestäben auftritt, die einen großen Widerstand gegenüber der Biegebeanspruchung um die y-Achse, aber nur einen kleinen Widerstand gegenüber Biegebeanspruchungen um die z-Achse aufweisen. Das Tragverhalten solcher Stäbe ist gekennzeichnet durch das Verdrehen bzw. das Kippen des Stabquerschnitts, hervorgerufen durch aus Imperfektionen entstehenden Beanspruchungen, die von der Hauptbeanspruchungsrichtung abweichen (siehe auch Kap. 2). Durch das Verdrehen bzw. Kippen des Querschnitts wiederum werden die Beanspruchungen um die z-Achse erhöht. Falls nicht vorher die Grenze der Tragfähigkeit des Materials erreicht wird, führt dieses Tragverhalten dazu, dass der Querschnitt sich um 90 Grad verdreht und somit der Stab nur die Tragfähigkeit gegenüber Beanspruchungen um die z-Achse besitzt. Im Bauwesen ist das Erreichen dieser Endtragfähigkeit allerdings nicht möglich, da die großen Verformungen,

die dabei entstehen, das Tragwerk gebrauchsuntauglich machen würden.

Hooley und Madsen [36] führen 1964 erste Versuche an kippgefährdeten Biegestäben aus Brettschichtholz durch und verifizieren dabei die Abhängigkeit der Traglast kippgefährdeter Biegestäbe von dem Verhältniswert

$$\lambda_m = \frac{\sqrt{\ell \cdot h}}{b}, \quad (5.14)$$

der auch Kipp-Schlankheit genannt wird. Dabei ist ℓ die Länge, h die Höhe und b die Breite des Biegestabs. Larsen und Theilgard [46] untersuchen 1979 Biegestäbe aus dänischem Nadelholz auf die Größe der Imperfektionen. Sie geben für die maximale Vorkrümmung Werte in Abhängigkeit von der Länge, für die maximale Vorverdrehung Werte in Abhängigkeit vom Verhältnis Höhe zu Breite an. Darüber hinaus lösen sie das Spannungsproblem (siehe Kap. 2.2.5) des kippenden und biegedrillknickenden Biegestabs und geben eine Bemessungsgleichung unter der Voraussetzung eines ideal-elastischen Materialverhaltens an. Auf Grundlage dieser Arbeit wurde laut der Erläuterung zur DIN 1052:1988 [33] das bis heute gültige vereinfachte Verfahren mit dem Hilfswert k_B (DIN 1052:1988) bzw. k_m (DIN 1052:2004) für den kippgefährdeten Biegestab hergeleitet.

5.4.2 Analytische Ermittlung der Traglast

Die Tragfähigkeit von kippgefährdeten Biegestäben kann ähnlich wie beim knickgefährdeten Druckstab durch eine analytische Bemessung ermittelt werden. Der Querschnitt des Biegestabs wird durch zweiachsige Biegung beansprucht. Für die zweiachsige Biegung wird in DIN 1052:2004-08 und EN 1995:2005-12 die Bemessungsgleichung

$$1 \geq \max \left\{ \begin{array}{l} k_{red} \cdot \frac{\sigma_{m,y}}{f_m} + \frac{\sigma_{m,z}}{f_m} \\ \frac{\sigma_{m,y}}{f_m} + k_{red} \cdot \frac{\sigma_{m,z}}{f_m} \end{array} \right. \quad (5.15)$$

mit $k_{red} = 0,7$ angegeben. Der Beiwert k_{red} wird jedoch begrenzt auf Querschnitte, deren Verhältnis h/b kleiner als 4 ist. Aus der reinen Querschnittstragfähigkeit ergibt sich diese Einschränkung nicht, wie bereits in Kap. 4.3.2 beschrieben ist. Inwieweit diese Einschränkung in Bezug auf kippgefährdete Biegestäbe sinnvoll ist, soll hier untersucht werden. Daher wird zunächst der Beiwert k_{red} weiter berücksichtigt. Unter der Annahme, dass die Normalkraftbeanspruchung $N_x = \alpha_N \equiv 0$ ist, wird Gl. (2.199) zu

$$M_{z,nl,d} = \frac{M_{y,nl,d} \cdot \vartheta_0 + (N_{crit} \cdot \alpha_M^2) \cdot \vartheta_0}{1 - \alpha_M^2} \quad (5.16)$$

und kann in Gl. (5.15) eingesetzt werden. Die Auflösung der entstandenen Gleichungen nach M_y ergibt die kubischen Gleichungen

$$0 = M_{y,nl,d}^3 - M_{y,nl,d}^2 \cdot \left(\frac{h}{b} \cdot k_{red} \cdot v_0 \cdot N_{crit} + W_y \cdot f_m \right) - M_{y,nl,d} \cdot M_{y,crit}^2 \cdot \left(\frac{h}{b} + k_{red} \cdot v_0 \right) + M_{y,crit}^2 \cdot W_y \cdot f_m \quad (5.17)$$

und

$$0 = M_{y,nl,d}^3 - M_{y,nl,d}^2 \cdot \frac{1}{k_{red}} \cdot \left(\frac{h}{b} \cdot v_0 \cdot N_{crit} + W_y \cdot f_m \right) - M_{y,nl,d} \cdot M_{y,crit}^2 \cdot \left(\frac{h}{b} + \frac{v_0}{k_{red}} \right) + \frac{1}{k_{red}} \cdot M_{y,crit}^2 \cdot W_y \cdot f_m, \quad (5.18)$$

deren jeweils kleineres sinnvolles Ergebnis die Traglast $M_{y,nl,d}$ für die Biegebeanspruchung ergibt.

Zusätzlich zu der zweiachsigen Biegung, die Spannungen in x-Richtung erzeugt, wird der Biegestab durch das Torsionsmoment M_x nach Gl. (2.159) beansprucht. Die daraus entstehenden Schubspannungen müssen der Bemessungsgleichung

$$\frac{M_x}{W_x \cdot f_{v,d}} = \frac{\tau_{Tor,d}}{f_{v,d}} \leq 1 \quad (5.19)$$

genügen. Durch Einsetzen von Gl. (2.159) in $M_x/W_x = \tau_{Tor,d}$ und weiter in Gl. (5.19) ergibt sich die quadratische Bemessungsgleichung

$$0 = M_{y,nl,d}^2 - M_{y,nl,d} \cdot \frac{M_{crit}^2 \cdot v_0 \cdot \frac{\pi}{\ell}}{v_0 \cdot M_{crit} + M_{x,el}} - \frac{M_{crit}^2 + M_{x,el}}{v_0 \cdot M_{crit} \cdot M_{x,el}} \quad (5.20)$$

mit

$$M_{x,el} = f_{v,d} \cdot W_x, \quad (5.21)$$

dessen sinnvolle Lösung die Traglast $M_{y,nl,d}$ für die Torsionsbeanspruchung angibt.

5.4.3 Traglast nach dem k_m -Verfahren

Das k_m -Verfahren ist in DIN 1052:2004-08 beschrieben. Der Bemessungswert der Traglast $M_{ErSt,d}$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{M_{ErSt,d}}{k_m \cdot W_y \cdot f_{m,d}} = 1 \quad (5.22)$$

mit den Berechnungsgleichungen für den Beiwert k_m

$$k_m = \min \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda_{rel,m} \leq 0,75 \\ 1,56 - 0,75 \cdot \lambda_{rel,m} & \text{für } 0,75 \leq \lambda_{rel,m} \leq 1,4 \\ \frac{1}{\lambda_{rel,m}^2} & \text{für } 1,4 \leq \lambda_{rel,m} \end{cases} \quad (5.23)$$

mit

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,crit}}} = \sqrt{\frac{\ell_{ef} \cdot h}{\pi \cdot b^2}} \cdot \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sqrt{E_{0,05} \cdot G_{0,05}}}} \quad (5.24)$$

unter der Voraussetzung, dass Rechteckquerschnitte verwendet werden, zu

$$M_{ErSt,d} = k_m \cdot f_{m,d} \cdot W_y. \quad (5.25)$$

Dabei ist die Kipp-Ersatzstablänge $\ell_{m,ef}$ durch

$$\ell_{m,ef} = \frac{\pi}{\gamma_M \cdot M_{crit}} \cdot \sqrt{E_{0,05} \cdot I_z \cdot G_{0,05} \cdot I_x} \quad (5.26)$$

zu ermitteln. Alternativ können auch die Gleichungen in Tab. A.4 bzw. Tab. A.4 verwendet werden, wenn für die Steifigkeiten E und G die jeweils durch γ_m geteilten 5-Prozent-Fraktilwerte eingesetzt werden.

5.4.4 Schubversagen bei kippgefährdeten Biegestäben

In Bild 5.13 sind die analytisch nach Kap. 5.4.2 ermittelten Traglasten für die Torsionsbeanspruchung denen für die Biegebeanspruchung exemplarisch für einen Querschnitt mit $h/b = 500\text{mm}/100\text{mm}$ aus Brettschichtholz (Gl 24h) unter Vernachlässigung der Vorverdrillung ϑ_0 gegenübergestellt. In Bild 5.14 ist der Verhältniswert $r_{Kip,\tau}$, der das Verhältnis der Torsionsbeanspruchbarkeit und der Biegebeanspruchbarkeit angibt, dargestellt. Es wird deutlich, dass bei kurzen gedrunenen Biegestäben mit $\lambda_m \leq 20$ die Traglast für die Biegebeanspruchung klar maßgebend ist. Für schlankere Biegestäbe mit einer größeren Kipp-Schlankheit ergeben sich nur noch kleine Unterschiede.

Die analytischen Ergebnisse der Torsionsbeanspruchbarkeit werden durch numerische Berechnungen überprüft. Die Ermittlung der Traglast bei Erreichen der Schubfestigkeit des Biegestabs mit der FE-Methode ergibt für schlanke Stäbe eine gute Übereinstimmung mit der Traglast nach analytischer Berechnung. Dabei kann festgestellt werden, dass bei der numerischen Berechnung die Schubfestigkeit knapp vor der Zugfestigkeit erreicht wird. Andererseits liegen die Traglasten aufgrund von Schubversagen nach analytischer

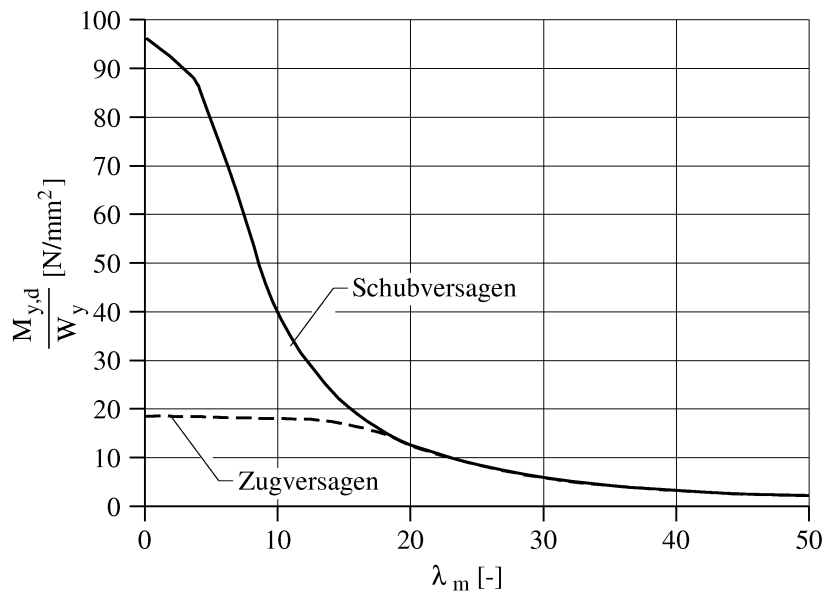


Bild 5.13: Traglast von kippgefährdeten Biegestäben mit $h/b = 500\text{mm}/100\text{mm}$ bei Zug- und bei Schubversagen

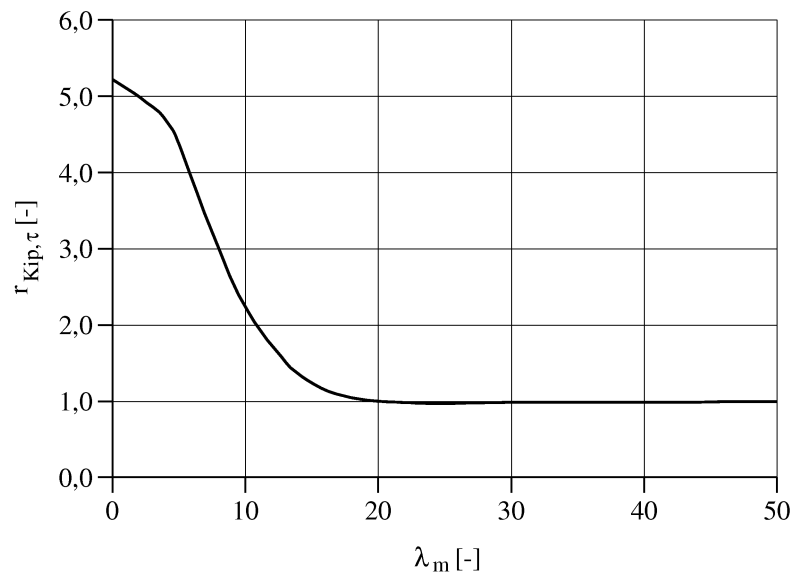


Bild 5.14: Verhältniswert $r_{Kip,\tau}$ für kippgefährdete Stäbe mit $h/b = 500\text{mm}/100\text{mm}$

Berechnung unter denen nach numerischer Berechnung.

Bei gedrunenen Stäben wird bei der FE-Analyse die Schubfestigkeit erst erreicht, wenn die Zugfestigkeit im Zugbereich weit überschritten ist. Die Ergebnisse sind nicht verwertbar, da nach Überschreiten der Zugfestigkeit das hier angewendete Materialmodell der FE-Methode nicht mehr das tatsächliche Materialverhalten beschreibt (Kap. 5.2.2).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass bei gedrunenen Stäben stets klar die Zugfestigkeit maßgebend ist. Bei schlanken Stäben wird die Tragfähigkeit durch die Schubfestigkeit begrenzt, es ergeben sich jedoch nur minimale Unterschiede zu der Tragfähigkeit bei Erreichen der Zugfestigkeit. Um einen sicheren Nachweis führen zu können, wird vorgeschlagen, stets sowohl die Zug- als auch die Schubtragfähigkeit bei der Bemessung zu überprüfen. (Dies gilt unter Berücksichtigung der zukünftig in den Normen EN 1995:2005-12 und DIN 1052:2004-08 verringert anzunehmenden Schubfestigkeiten $f_{v,k} = 2,7$. Bei Anwendung der alten charakteristischen Schubfestigkeiten $f_{v,k} = 3,5$ wird die Traglast bei Erreichen der Schubfestigkeit nicht maßgebend.

Es ist zu erwarten, dass bei Verwendung von Holz höherwertiger Festigkeitsklassen (z.B. C30 oder Gl 36h) der Schubnachweis mit größeren Abweichungen maßgebend wird. Grund für die Annahme ist der Umstand, dass in höheren Festigkeitsklassen die Biegezugfestigkeit deutlich größer angenommen wird, die Schubfestigkeit jedoch gleich bleibt. Beim Nachweis von kippgefährdeten Stäben solcher Festigkeitsklassen sollte stets auch ein Schubnachweis geführt werden.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Aussage, die Schubtragfähigkeit mindert die Tragfähigkeit des gesamten Bauteils nicht wesentlich ab, nur für den sogenannten Kipp-Ersatzstab gilt. Bei Bauteilen, die geometrisch dem Kipp-Ersatzstab ähneln und daher näherungsweise über die Kipp-Ersatzstablänge bemessen werden sollen (Kap. 2.2.6, Kap. 2.3.3), muss überprüft werden, ob dort eventuell auftretende Querlasten die Schubbeanspruchung aus Torsion und Querkraft nicht maßgeblich vergrößern. In Kap. 6 wird genauer auf diese Problematik eingegangen.

5.4.5 Kippgefährdete Biegestäbe aus Brettschichtholz

In diesem Kapitel werden die Traglasten kippgefährdeter Biegestäbe aus Brettschichtholz (Gl 24h) mit Hilfe der drei Berechnungsmethoden k_m -Verfahren, analytische Berechnung nach Kap. 2 sowie numerische FE-Methode untersucht. Die Ergebnisse werden gegenübergestellt und bewertet.

Durch die numerische Untersuchung kann zunächst festgestellt werden, dass bei kippgefährdeten Biegestäben im Gegensatz zu den Druckstäben stets zuerst die Zugfestigkeit im Zugbereich des Stabs oder die Schubfestigkeit im Auflagerbereich erreicht wird, bevor das Bauteilversagen eintritt. Genau genommen kann ein solches Bauteilversagen gar nicht festgestellt werden. Bei sehr schlanken Biegestäben, λ_M etwa grösser 20, verdreht sich in der Simulation bei ausreichend großer äußerer Belastung der Querschnitt um fast 90 Grad. Daher nähert sich die Tragfähigkeit für sehr schlanke Biegestäbe genau der Tragfähigkeit des um 90 Grad verdrehten Querschnitts, dem b/h -fachen Wert der linearen Tragfähigkeit. Bei gedruneneren Stäben wird die Zugfestigkeit bereits bei kleinen Verdrehungen des Querschnitts erreicht. Von einer möglichen Bauteiltragfähigkeit sind diese Stäbe in dieser Belastungssituation noch weit entfernt. Da die numerische Analyse nach

Überschreiten der Zugfestigkeit keine verwertbaren Ergebnisse liefert (Kap. 5.2.2), kann ein Bauteilversagen im Rahmen dieser Arbeit nicht verifiziert werden.

Weil das Erreichen der Zugfestigkeit die Tragfähigkeit des kippgefährdeten Biegestabs bestimmt, ist der Einfluss des Volumeneffekts von Bedeutung. Wie bereits in Kap. 4.2.1 erläutert, hat der Volumeneffekt gerade auf die M_y - M_z -Interaktion einen großen Einfluss. Bei der numerischen Analyse kann dieser Volumeneffekt jedoch nicht erfasst werden. Aus diesem Grund werden hier die Ergebnisse der numerischen zunächst mit der analytischen Traglastermittlung ebenfalls unter Vernachlässigung des Volumeneffekts verglichen. Dabei geht es darum, die Qualität der analytischen Methode durch Vergleichsrechnungen mit der numerischen Methode zu überprüfen. Im Anschluss werden die Ergebnisse der analytischen Berechnung, dann mit vereinfachter Berücksichtigung des Volumeneffekts durch k_{red} mit dem k_m -Verfahren verglichen, um die Qualität des k_m -Verfahrens zu überprüfen.

Die Traglasten der kippgefährdeten Biegestäbe lassen sich genauso wie die Traglasten knickgefährdeter Druckstäbe auf die Spannungsebene normieren, indem das maximale Moment M_y durch das Widerstandsmoment W_y geteilt wird. In Bild 5.15 und Bild 5.16 sind die so auf Spannungsebene normierten Tragfähigkeiten für Biegestäbe mit den Querschnitten $h/b = 500\text{mm}/100\text{mm}$ und $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ jeweils einmal nach analytischer (Gl. (5.17) bzw. Gl. (5.18) unter Vernachlässigung von k_{red}) und einmal nach numerischer Berechnungsmethode über der Kipp-Schlankheit dargestellt. Die numerisch ermittelten Tragfähigkeiten sind durchweg größer als jene der analytischen Berechnung. In Teilbereichen weichen die Ergebnisse der numerischen FEM-Analyse stärker von den analytisch ermittelten Ergebnissen ab. Die Ursache liegt darin, dass die numerische FEM-Analyse große Verdrehungen berücksichtigt, die analytische Berechnung jedoch nicht. So kommt es, dass bei Bauteilen mit großer Kipp-Schlankheit die Tragfähigkeit, die mit der analytischen Methode ermittelt werden kann, unter die Tragfähigkeit des um 90 Grad verdrehten Stabs absinkt, was mechanisch jedoch keinen Sinn ergibt. Bei der analytischen Berechnung wird die Abminderung des Moments um die y-Achse des Stabs (M_y), die bei einer großen Verdrehung des Querschnitts auftritt, nicht berücksichtigt. Daher werden die Beanspruchungen eher zu groß angenommen und damit die Traglast abgemindert.

Bei den Stäben mit kleiner und mittlerer Kipp-Schlankheit ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung der ermittelten Traglasten nach der numerischen und nach der analytischen Methode.

In Bild 5.17 sind die Last-Verformungs-Kurven nach analytischer und numerischer Berechnung für einen Biegestab mit den Abmessungen $L = 9\text{ m}$, $h = 1\text{ m}$ und $b = 0,1\text{ m}$, d.h. mit einer Kipp-Schlankheit von $\lambda_M = 30$, dargestellt. Die numerisch ermittelte Kurve bricht bei Erreichen der Zugfestigkeit im Zugbereich des Stabs ab, da die weiteren Verformungen von dem FE-Modell nicht mehr korrekt erfasst werden. Nach Überschreiten der Zugfestigkeit beginnt das FE-modellierte Material auch bei Zug zu plastizieren. In der analytisch berechneten Kurve kann die Verdrehung ϑ_{el} des Stabs theoretisch bis kurz

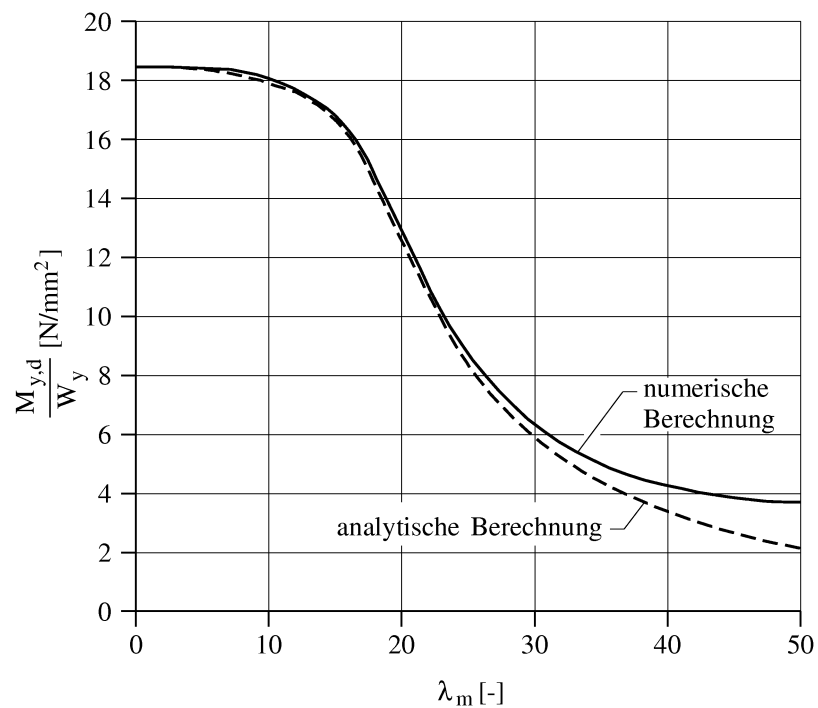


Bild 5.15: Traglast eines Kipp-Ersatzstabs mit $h/b = 500\text{mm}/100\text{mm}$ bei Zugversagen nach analytischer und numerischer Berechnung

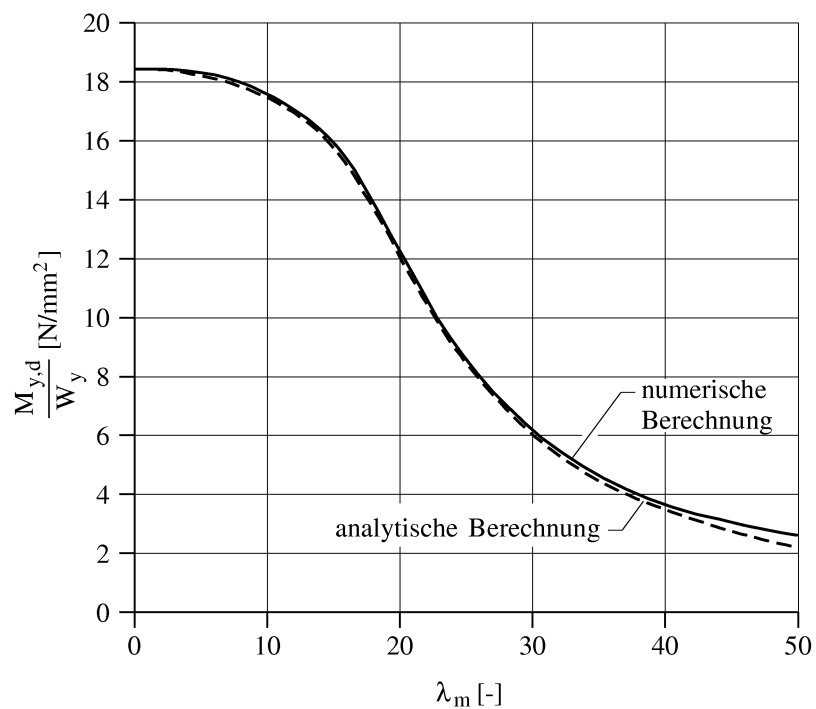


Bild 5.16: Traglast eines Kipp-Ersatzstabs mit $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ bei Zugversagen nach analytischer und numerischer Berechnung

vor dem Erreichen der Beanspruchung $M_y = M_{y,crit}$ dargestellt werden, allerdings sind die Verformungen bei Beanspruchungen in der Nähe der kritischen Last nicht verwendbar, da in diesem Lastbereich die ursprüngliche Annahme mäßiger Verdrehungen nicht mehr eingehalten ist. Die beiden Kurven zeigen in dem darstellbaren Bereich eine gute Übereinstimmung.

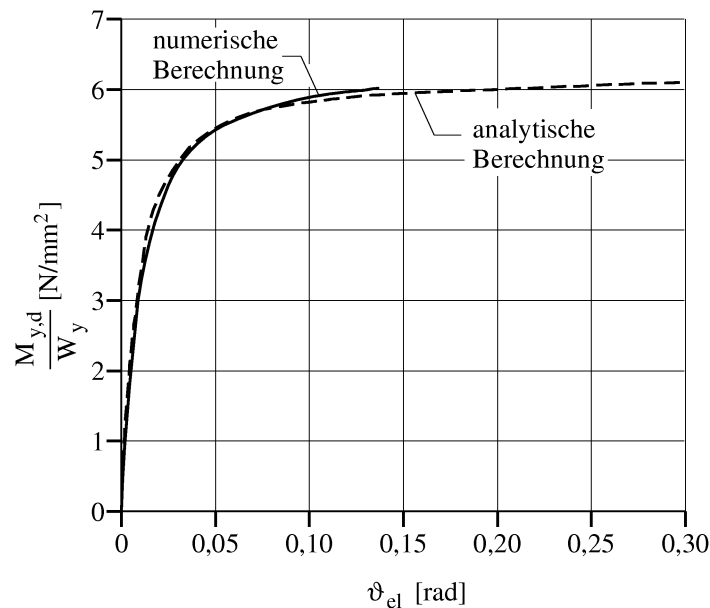


Bild 5.17: Last-Verformungs-Linie eines kippenden Biegestabs nach analytischer und numerischer Berechnung

Wie oben bereits erwähnt, ist die Tragfähigkeit von Stäben, deren Querschnitt sich um 90 Grad verdreht hat, im Bauwesen nicht verwendbar. Wird Biegestäben mit grosser Kipp-Schlankheit im FE-Modell die analytisch ermittelte Traglast als äußere Last aufgebracht, werden wesentlich kleinere Verdrehungen als 90 Grad ermittelt. Allerdings können auch diese nicht mehr als klein bezeichnet werden. Im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit fallen die Verdrehungen jedoch wesentlich kleiner aus. Um eine Vorstellung davon zu ermöglichen, wie groß die Verdrehungen bei Erreichen der analytischen Traglast bei gebräuchlichen Biegestäben ausfallen, sind in Tab. 5.1 die maximalen Verdrehwinkel ϑ_{el} für einige ausgewählte Biegestäbe im Grenzzustand der Tragfähigkeit und im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit angegeben.

Der Vergleich der analytisch und numerisch ermittelten Traglasten zeigt, dass erstere für eine Bemessung verwendet werden können, da sie durch die numerisch ermittelten Traglasten bestätigt werden bzw. kleiner als diese sind. Die Überprüfung der Verformungen bei Erreichen des zur Traglast gehörigen charakteristischen Beanspruchungsniveaus zeigt, dass mit der analytischen Methode bemessene kippgefährdete Biegestäbe gebrauchstauglich bleiben. Die analytische Bemessung mit Hilfe von Gl. (5.16) kann demnach verwendet werden.

| λ_M | h/b | | | |
|-------------|---------------|--------------------|---------------|--------------------|
| | 500/100 | | 1000/100 | |
| | Tragfähigkeit | Gebirgtauglichkeit | Tragfähigkeit | Gebirgtauglichkeit |
| 20 | 4,98° | 0,49° | 3,43° | 0,45° |
| 30 | 9,62° | 0,52° | 9,48° | 0,51° |
| 40 | 10,89° | 0,57° | 11,92° | 0,52° |

Tabelle 5.1: Maximaler Verdrehungswinkel ϑ_{el} einer FE-Simulation bei Erreichen der analytischen Traglast im Grenzzustand der Tragfähigkeit und bei Erreichen des zugehörigen charakteristischen Beanspruchungsniveaus

In Bild 5.18 sind die Traglasten nach dem k_m -Verfahren sowie nach analytischer Berechnung unter Verwendung des Beiwerts k_{red} für die vereinfachte Berücksichtigung des Volumeneffekts für Stäbe mit $h/b = 5$ und $h/b = 10$ dargestellt. Im Rahmen der Untersuchung kann festgestellt werden, dass bei Biegestäben mit einer Kipp-Schlankheit von etwa $\lambda_M \geq 20$ die Spannungen aus Biegung um die z-Achse ($\sigma_{m,z}$) größer werden als die Spannungen aus Biegung um die y-Achse. Das heißt, bei Biegestäben mit einer Kipp-Schlankheit größer als 20 ist k_{red} auf $\sigma_{m,z}$, bei Biegestäben mit einer Kipp-Schlankheit kleiner als 20 ist k_{red} auf $\sigma_{m,y}$ anzuwenden.

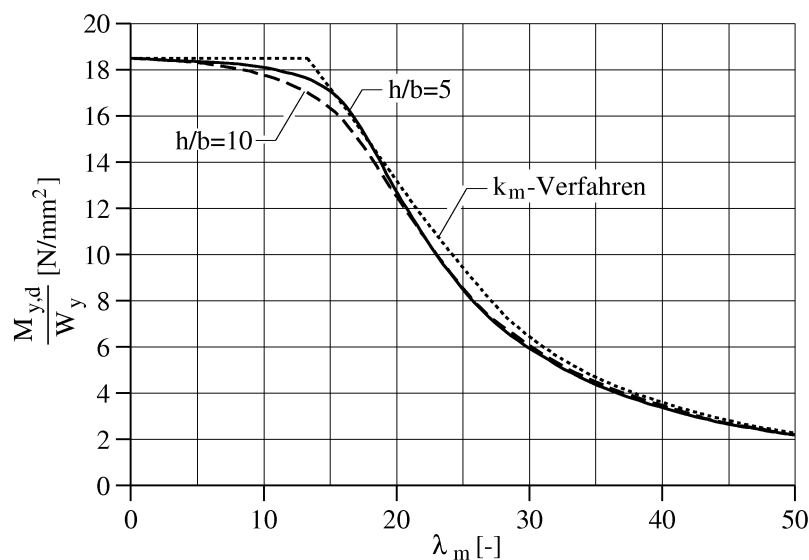


Bild 5.18: Normierte Traglasten kippgefährdeter Biegestäbe nach dem k_m -Verfahren und nach analytischer Berechnung mit $h/b=5$ und $h/b=10$

Die Traglasten, die nach dem k_m -Verfahren ermittelt werden können, liegen fast vollständig über denen nach analytischer Berechnung unter Verwendung des Beiwerts k_{red} . In Bild 5.19 sind die Abweichungen durch den Verhältnisswert $r_M = M_{y,ErSt}/M_{y,nl}$ in Abhängigkeit von der Kipp-Schlankheit dargestellt. Nach dem k_m -Verfahren können bis zu

10 Prozent höhere Traglasten ermittelt werden als nach analytischer Berechnung. Dieser Umstand ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass das k_m -Verfahren für ein anderes Sicherheitskonzept entwickelt wurde als das heute nach DIN 1052:2004-08 und EN 1995:2005-12 gültige.

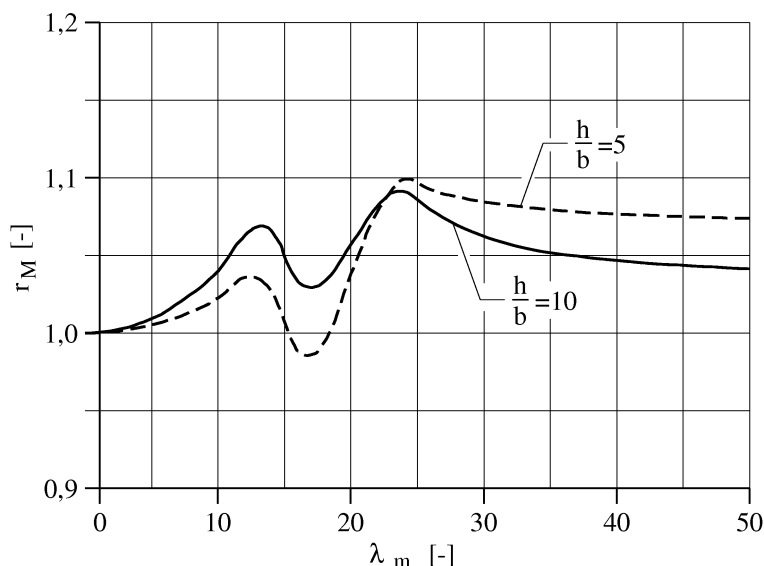


Bild 5.19: Verhältniswert $r_M = M_{ErSt}/M_{nl}$ mit Berücksichtigung von k_{red} in Abhängigkeit von der Kipp-Schlankheit für $h/b=5$ und $h/b=10$

Zum Vergleich ist in Bild 5.19 der Verhältniswert r_M für eine analytische Ermittlung der Traglasten ohne Berücksichtigung des Beiwerts k_{red} dargestellt, denn nach den gültigen Normen (EN 1995:2005-12, DIN 1052:2004-08) darf der Beiwert durch die Einschränkung der Verwendbarkeit auf Querschnitte mit einem Verhältnis $h/b \leq 4$ für das Kippen nicht berücksichtigt werden. Es wird deutlich, dass die Abweichungen ohne Verwendung des Beiwerts für die Berücksichtigung des Volumeneffekts noch grösser sind als mit diesem.

Es wird deutlich, dass die Traglasten nach analytischer Berechnung für Biegestäbe mit verschiedenen Verhältnissen h/b leicht voneinander abweichen, die Traglasten nach dem k_m -Verfahren jedoch nicht. Die Ursache dafür ist, dass beim k_m -Verfahren die Tragfähigkeit allein von der Kipp-Schlankheit abhängt. Stäbe mit verschiedener Höhe und Länge können jedoch die gleiche Kipp-Schlankheit besitzen, obwohl sie ein unterschiedliches Tragverhalten aufweisen. So haben z.B. ein Biegestab der Länge 10m und der Höhe 500mm die gleiche Kipp-Schlankheit wie ein Stab der Länge 5m und der Höhe 1000mm bei gleicher Breite.

Da offensichtlich die Tragfähigkeit verschiedener Biegestäbe mit gleicher Kipp-Schlankheit voneinander abweichen, stellt sich die Frage, ob die Vereinfachung des k_m -Verfahrens, Biegestäben mit gleicher Kipp-Schlankheit, aber unterschiedlichen h/b -Verhältnissen die

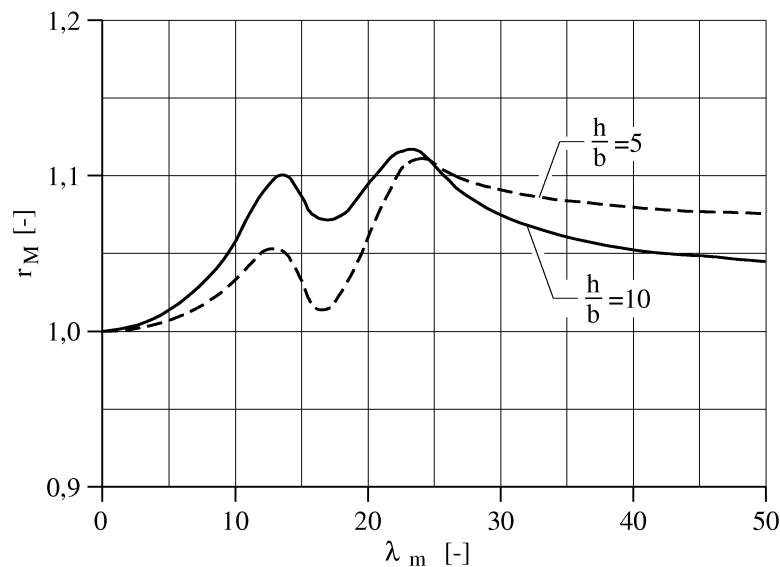


Bild 5.20: Verhältnisswert $r_M = M_{ErSt}/M_{nl}$ ohne Berücksichtigung von k_{red} in Abhängigkeit von der Kipp-Schlankheit für $h/b=5$ und $h/b=10$

gleiche Tragfähigkeit zuzuordnen, zulässig ist. In Bild 5.21 sind die Traglasten nach analytischer Berechnung für Stäbe gleicher Schlankheit in Abhängigkeit vom Verhältnis h/b dargestellt. Die Abweichungen zeigen zunächst einmal keine klare Tendenz. Im für kippgefährdete Biegestäbe relevanten Bereich von $h/b = 4$ bis allerhöchstens $h/b = 12$ kann jedoch festgestellt werden, dass für Biegestäbe mit mittlerer Kipp-Schlankheit (λ_M von 10 bis 20) die Tragfähigkeit mit zunehmendem Verhältnis h/b leicht abnimmt. Die größten Abweichungen liegen dabei bei etwa 10 Prozent. Für schlankere Biegestäbe (λ_M grösser 25) kann im für die Bemessung relevanten Bereich angenommen werden, dass die Tragfähigkeiten nahezu gleich bleiben, da die Abweichungen kleiner als 2 Prozent sind.

Insgesamt sind also selbst bei Verwendung des Beiwerts k_{red} Abweichung bis zu 10 Prozent zwischen dem k_m -Verfahren und der analytischen Lösung im für die Bemessung relevanten Bereich feststellbar. Diese Abweichungen allein können durchaus als zulässig angenommen werden. In DIN 1052:2004-08 z.B. dürfen Schnittgrößen 'nach Theorie I. Ordnung ermittelt werden, wenn sie sich durch Berücksichtigung des geometrisch nicht-linearen Verhaltens um nicht mehr als 10 Prozent vergrößern würden'. Wünschenswert wäre in diesem Fall jedoch, wenn die Traglasten nach dem k_m -Verfahren eher unterhalb der Traglasten nach analytischer Berechnung lägen. Denn das k_m -Verfahren dient der vereinfachten Bemessung und sollte eigentlich eine 'auf der sicheren Seite liegende' Abschätzung darstellen.

5.4.6 Einfluss der Imperfektion Vorverdrehung

Neben der Vorkrümmung um die z-Achse eines kippgefährdeten Biegestabs hat auch die Vorverdrehung des Stabs ϑ_0 einen Einfluss auf dessen Tragfähigkeit. In der Normung wird

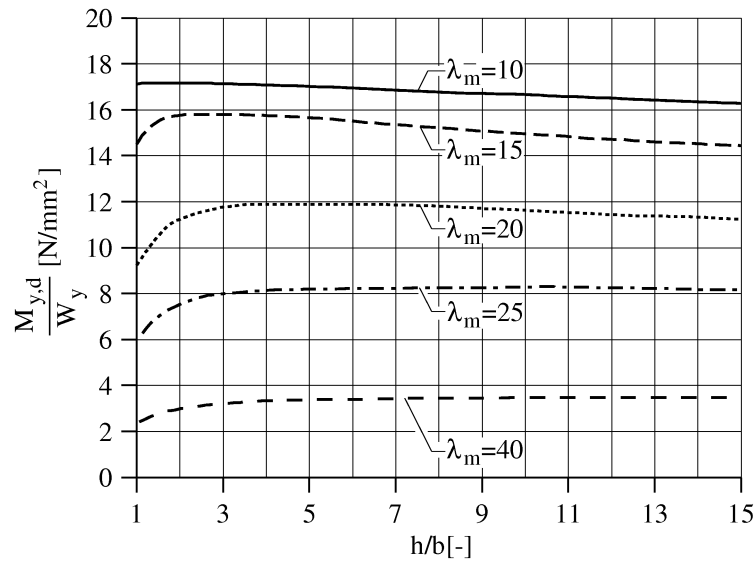


Bild 5.21: Normierte Traglasten kippgefährdeter Biegestäbe bei gleicher Schlankheit und verändertem h/b -Verhältnis

die Annahme einer solchen Imperfektion nicht gefordert. Der Einfluss ist allerdings ähnlich deutlich, wie beim Druckstab der Einfluss der exzentrischen Lasteinleitung. In Bild 5.22 sind die auf Spannungsebene normierten Traglasten exemplarisch für einen kippgefährdeten Biegestab mit den Abmessungen $h/b = 500\text{mm}/100\text{mm}$ je einmal mit und einmal ohne eine Vorverdrehung ϑ_0 des Stabs dargestellt. Als Amplitude für die sinusförmige Vorverdrehung wurde dabei der von Larsen und Theilgaard [46] ermittelte Wert $\vartheta_0 = 0,05 \cdot b/h$ angesetzt. Es wird deutlich, dass die Vorverdrehung tatsächlich einen ähnlichen Einfluss auf die Tragfähigkeit von kippgefährdeten Biegestäben hat wie die exzentrische Lasteinleitung auf den knickgefährdeten Druckstab. Auch von der Vorverdrehung werden vor allem gedrungene Biegestäbe beeinflusst. Die größte Abweichung der Tragfähigkeit beträgt bis zu 5 Prozent. Zur Verdeutlichung der Abweichungen ist in Bild 5.23 der Verhältniswert r_{ϑ_0} , der das Verhältnis der Traglast mit und ohne Berücksichtigung der Vorverdrehung angibt, dargestellt.

5.4.7 Erkenntnisse der Untersuchung

Mit der numerischen Untersuchung der kippgefährdeten Biegestäbe kann bestätigt werden, dass die analytisch ermittelten Traglasten mit Hilfe von Gl. (5.17) und Gl. (5.18) sowie Gl. (5.20) auf der sicheren Seite liegen. Außerdem kann festgestellt werden, dass ein Schubversagen aufgrund der Torsionsbeanspruchung des kippenden Stabs bei schlanken Stäben vor Erreichen der Zugtragfähigkeit anzunehmen ist, auch wenn keine zusätzlichen Querkräfte den Stab beanspruchen. Mit dem k_m -Verfahren können nur ungenaue Tragfähigkeiten ermittelt werden, die größtenteils oberhalb von den analytisch ermittelten und damit nicht 'auf der sicheren Seite' liegen.

Die analytische Bemessung mit Gl. (5.15) und Gl. (5.16) ist nicht komplizierter als das

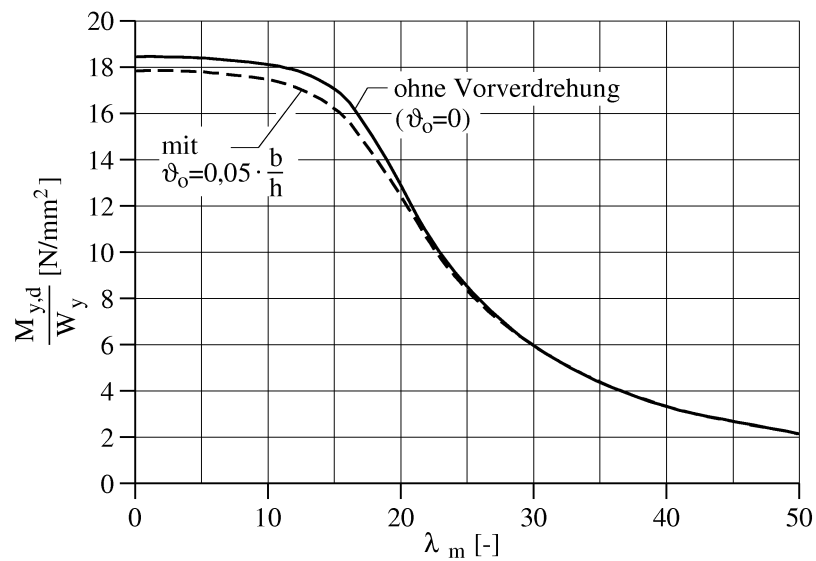


Bild 5.22: Normierte Traglasten kippgefährdeter Biegestäbe mit $h/b=5$ mit und ohne Berücksichtigung einer Vorverdrehung ϑ_0

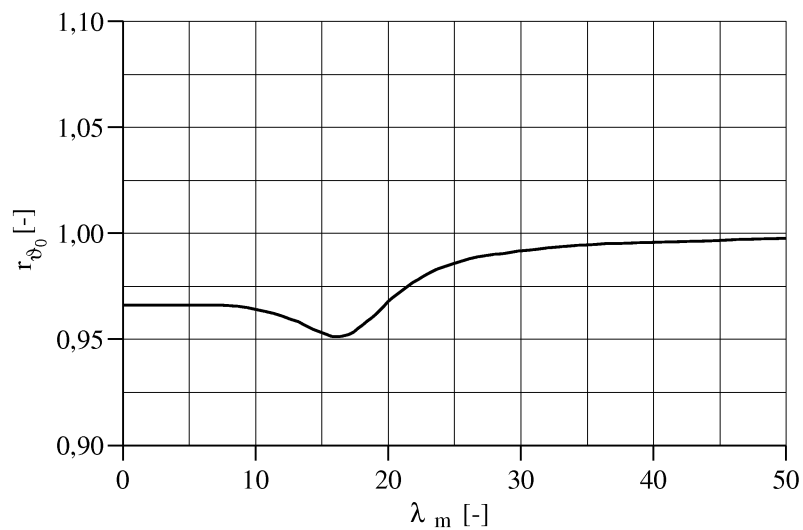


Bild 5.23: Darstellung des Verhältnisswerts r_{ϑ_0} in Abhängigkeit von der Kipp-Schlankeit

k_m -Verfahren. Sie hat jedoch den Vorteil, dass das Vorgehen klar nachvollziehbar ist. Die Parameter der Imperfektionen und Steifigkeiten gehen direkt in die Bemessung ein und können bei Bedarf angepasst werden. Die Verwendung dieser Bemessungsmethode für kippgefährdete Biegestäbe wird ausdrücklich empfohlen.

5.5 Tragfähigkeit von druck- und biegebeanspruchten Holzbauteilen

5.5.1 Allgemeines

Im Rahmen dieser Arbeit werden durch eine Kombination aus Biegung und Normalkraft beanspruchte Stäbe mit einem großen Verhältnis h/b , etwa größer 5, als biegedrillknickgefährdet bezeichnet. Diese Bezeichnung ist nicht eindeutig, da mit Biegedrillknicken üblicherweise das geometrisch nichtlineare Tragverhalten druckbeanspruchter Stäbe mit offenem Profil beschrieben wird. Im Gegensatz zu den einfach knickenden Stäben wird bei biegedrillknickenden Stäben ein Verdrillen des Querschnitts festgestellt. Die biegedrillknickenden Stäbe versagen durch eine Kombination von Ausknicken und Verdrillen. Bei druckbeanspruchten Stäben mit Vollquerschnitt, wie sie im Holzbau üblich sind, kommt diese Art des Versagens bei reiner Druckbeanspruchung nicht vor. Diese knicken 'nur' in Richtung der schwachen Achse aus, da durch die Geometrie des Vollquerschnitts bei reiner Druckbeanspruchung keine zusätzlichen Beanspruchungen erzeugt werden, die ein Verdrillen so stark unterstützen würden, dass dieses zum Versagen führen könnte.

Bei zusätzlicher Biegebeanspruchung kommt es bei Stäben mit einem großen Verhältnis h/b jedoch sehr wohl zu der Versagensform, die bei offenen Profilen schon bei reiner Druckbeanspruchung auftritt. Aus diesem Grund und auch, weil es im Holzbau keine andere eindeutige Bezeichnung für dieses geometrisch nichtlineare Tragverhalten gibt, werden diese kipp schlanken Stäbe mit Biege- und Normalkraftbeanspruchung biegedrillknickgefährdet und die zugehörige Versagensform Biegedrillknicken genannt.

In der aktuellen Normung (EN 1995:2005-12, DIN 1052:2004-08) wird für die Bemessung von biegedrillknickgefährdeten Stäben die Kombination der kombinierten k_c - k_m -Verfahren für das Knicken und das Kippen vorgeschlagen. Eine andere Möglichkeit ist die Bemessung durch Ermittlung der zusätzlichen Beanspruchungen mit Hilfe der analytisch hergeleiteten Gleichungen Gl. (2.199) und Gl. (2.200). Außerdem kann das Tragverhalten biegedrillknickgefährdeter Stäbe mit der FE-Methode untersucht werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Biegedrillknicken des in Kap. 2.3 analysierten Ersatzstabs anhand eines exzentrisch gedrückten Stabs untersucht. Das zugehörige statische Modell ist in Bild 5.25 und das räumliche Modell in Bild 5.24 dargestellt. Diese Art der Untersuchung hat den Vorteil, dass es nur eine unbekannte Beanspruchungsgröße (N_x) gibt, denn das äußere Moment um die starke Achse wird durch $M_y = N_x \cdot e_0$ beschrieben. Die Exzentrizität wird in Abhängigkeit von der Höhe des Stabs in der Form $e_0 = r_h \cdot h$ angegeben, wobei r_h ein frei wählbarer positiver Wert ist, der hier sinnvollerweise aber zwischen 0 und 1 gewählt wird. Größere Exzentrizitäten sind zwar denkbar, doch nähert sich die Beanspruchung dann einer reinen Biegebeanspruchung, die bereits im Kapitel 'Tragfähigkeit von biegebeanspruchten Holzbauteilen' (Kap. 5.4) ausreichend untersucht wurde. Durch die Wahl der Parameter wird eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse für Stäbe unterschiedlicher Geometrien angestrebt.

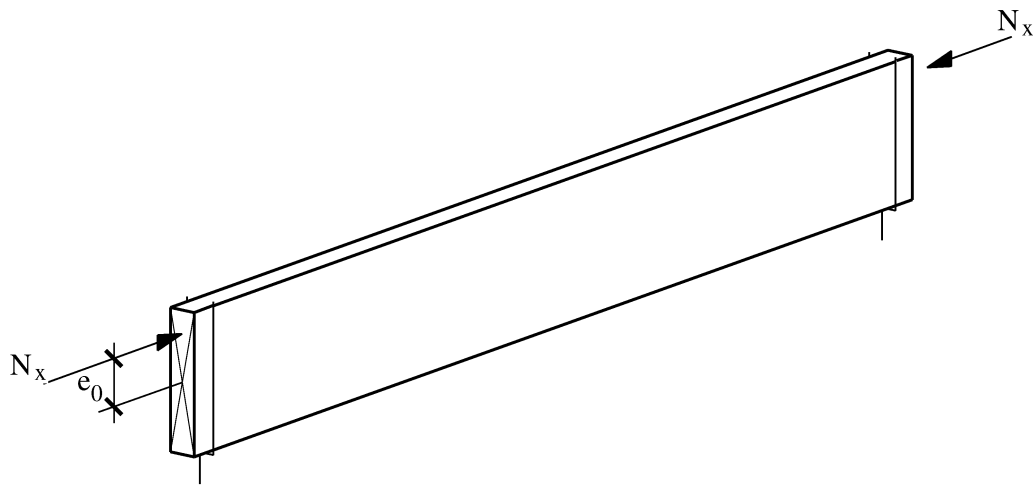
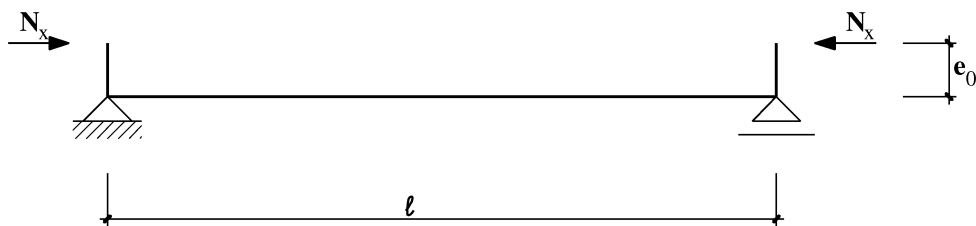


Bild 5.24: Exzentrisch gedrückter, biegedrillknickgefährdeter Stab

Bild 5.25: Statisches Modell des exzentrisch gedrückten, biegedrillknickgefährdeten Sta-
bes

5.5.2 Analytische Berechnung der Traglast

Mit Hilfe der Gl. (2.199) kann analog zum Knicken und Kippen die Tragfähigkeit von biegedrillknickgefährdeten Stäben bei Erreichen der Zugfestigkeit im Zugbereich und mit Hilfe von Gl. (2.200) bei Erreichen der Schubfestigkeit analytisch ermittelt werden.

Die Bemessungsgleichung nach EN 1995:2005-12 bzw. DIN 1052:2004-08 für Spannungen in Richtung der Stabachse

$$1 \geq \max \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} \right)^2 + k_{red} \cdot \frac{\sigma_{m,y}}{f_m} + \frac{\sigma_{m,z}}{f_m} \\ \left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{m,y}}{f_m} + k_{red} \cdot \frac{\sigma_{m,z}}{f_m} \end{array} \right. \quad (5.27)$$

kann zunächst durch Einsetzen von Gl. (2.199) zu den kubischen Gleichungen

$$0 = N_{nl,d}^3 - N_{nl,d}^2 \cdot N_{crit} (1 - \alpha_m^2) - N_{nl,d} \cdot N_{el}^2 \cdot \left(1 + k_{red} \cdot \frac{v_0 \cdot N_{crit}}{M_{z,el}} - \frac{M_{y,nl}}{M_{y,el}} \right) \quad (5.28)$$

$$+ N_{el}^2 \cdot N_{crit} \cdot \left(\left(1 - \frac{M_{y,nl}}{M_{y,el}} \right) \cdot (1 - \alpha_m^2) - k_{red} \cdot \frac{M_{y,nl}}{M_{z,el}} \cdot \left(\vartheta_0 + v_0 \cdot N_{crit} \cdot \frac{M_{y,nl}}{M_{crit}^2} \right) \right)$$

und

$$0 = N_{nl,d}^3 - N_{nl,d}^2 \cdot N_{crit} (1 - \alpha_m^2) - N_{nl,d} \cdot N_{el}^2 \cdot \left(1 + \frac{v_0 \cdot N_{crit}}{M_{z,el}} - k_{red} \cdot \frac{M_{y,nl,d}}{M_{y,el}} \right) \quad (5.29)$$

$$+ N_{el}^2 \cdot N_{crit} \cdot \left(\left(1 - k_{red} \cdot \frac{M_{y,nl,d}}{M_{y,el}} \right) \cdot (1 - \alpha_m^2) - \frac{M_{y,nl,d}}{M_{z,el}} \cdot \left(\vartheta_0 + v_0 \cdot N_{crit} \cdot \frac{M_{y,nl,d}}{M_{crit}^2} \right) \right)$$

mit

$$N_{el} = f_{c,0,d} \cdot A \quad (5.30)$$

$$M_{y,el} = f_{m,d} \cdot W_y \quad \text{und} \quad (5.31)$$

$$M_{z,el} = f_{m,d} \cdot W_z \quad (5.32)$$

zur Ermittlung der Traglast $N_{nl,d}$ aufgelöst werden. Die sinnvollen Ergebnisse der Gleichungen sind jedoch immer noch abhängig von dem aufgetragenen Moment $M_{y,nl,d}$. Da das Moment $M_{y,nl,d}$ jedoch auch über die Exzentrizität e_0 abhängig von der Traglast $N_{nl,d}$ ist, müssen die Lösungen durch den Einschub einer Iteration gefunden werden. Für eine Bemessung mit vorhandenen Schnittgrößen ist eine so aufwendige Berechnung selbstverständlich nicht nötig.

Analog zum Kippen in Kap. 5.4.2 wird der Stab beim Biegedrillknicken auch durch ein Torsionsmoment M_x beansprucht. Nach Gl. (2.200) kann dieses Torsionsmoment analytisch ermittelt werden. Die daraus entstehenden Schubspannungen müssen wiederum der Bemessungsgleichung

$$\frac{M_x}{W_x \cdot f_{v,d}} = \frac{\tau_{Tor,d}}{f_{v,d}} \leq 1 \quad (5.33)$$

genügen. Durch Einsetzen von Gl. (2.200) in Gl. (5.33) ergibt sich die quadratische Bemessungsgleichung

$$0 = N_{nl,d}^2 - N_{nl,d} \cdot \frac{M_{crit}^2 \cdot \left(v_0 \cdot \frac{\pi}{\ell} \cdot e_0 \cdot N_{crit} + M_{x,el} \right)}{\vartheta_0 \cdot M_{crit} + M_{x,el}} - \frac{M_{crit}^2 \cdot M_{x,el}}{e_0^2 \cdot \left(\vartheta_0 \cdot M_{crit} + M_{x,el} \right)} \quad (5.34)$$

mit

$$M_{x,el} = f_{v,d} \cdot W_x, \quad (5.35)$$

dessen sinnvolle Lösung die Traglast $M_{y,nl}$ für die Torsionsbeanspruchung angibt.

5.5.3 Traglast nach dem kombinierten k_c - k_m -Verfahren

Um durch Druck und Biegung beanspruchte Bauteile nach dem kombinierten k_c - k_m -Verfahren zu bemessen, müssen gemäß EN 1995:2005-12 bzw. DIN 1052:2004-08 die Verfahren nach Kap. 5.3.3 und Kap. 5.4.3 kombiniert werden. Die Ermittlung des Bemessungswerts der Tragfähigkeit erfolgt mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{N_{ErSt,d}}{k_c \cdot A \cdot f_{c,0,d}} + \frac{M_{ErSt,d}}{k_m \cdot W_y \cdot f_{m,d}} = 1 \quad (5.36)$$

bzw. unter Verwendung der Beschreibung des äußeren Moments durch $M_y = N_x \cdot e_0$ mit der Gleichung

$$\frac{N_{ErSt,d}}{k_c \cdot A \cdot f_{c,0,d}} + \frac{N_{ErSt,d} \cdot e_0}{k_m \cdot W_y \cdot f_{m,d}} = 1 \quad (5.37)$$

wobei die Beiwerte k_c und k_m nach den in Kap. 5.3.3 und Kap. 5.4.3 beschriebenen Gleichungen ermittelt werden. Die Traglast lässt sich dann durch

$$N_{ErSt,d} = \frac{k_m \cdot k_c \cdot f_{m,d} \cdot f_{c,0,d} \cdot b \cdot h^2}{k_m \cdot f_{m,d} \cdot h + k_c \cdot f_{c,0,d} \cdot 6 \cdot e_0} \quad (5.38)$$

bestimmen.

5.5.4 Schubversagen bei biegedrillknickgefährdeten Stäben

Für den biegedrillknickgefährdeten Biegestab gelten die in Kap. 5.4.4 für den kippgefährdeten Stab getroffenen Aussagen sinngemäß. In Bild 5.26 und Bild A.5 im Anhang sind beispielhaft die auf den Querschnitt normierten Traglasten bei Erreichen der Zug- und der Schubbeanspruchbarkeit für Stäbe mit einem Querschnittsverhältnis von $h/b = 10$ jeweils für Exzentrizitäten $e_0 = h$ und $e_0 = h/5$ angegeben. In Bild 5.27 ist zur Veranschaulichung auch noch der Verhältniswert $r_{BDK,\tau}$, der das Verhältnis der Torsionsbeanspruchbarkeit und der Biegebeanspruchbarkeit angibt, für $e_0 = h$ dargestellt. Es wird ersichtlich, dass auch für biegedrillknickgefährdete Stäbe mit stark exzentrisch aufgebrachtener Normalkraftbeanspruchung die Traglast bei Erreichen der Schubtragfähigkeit nicht wesentlich kleiner wird als bei Erreichen der Zugtragfähigkeit. Es ist jedoch angeraten, beide Nachweise zu führen. Dies gilt, wie bereits in Kap. 5.4.4 angemerkt, unter Berücksichtigung der zukünftig in den Normen EN 1995:2005-12 und DIN 1052:2004-08 verringert anzunehmenden Schubfestigkeiten ($f_{v,k} = 2,7$). Bei Anwendung der alten charakteristischen Schubfestigkeiten ($f_{v,k} = 3,5$) wird die Traglast bei Erreichen der Schubfestigkeit für Holz der Festigkeitsklasse Gl 24h nicht maßgebend. Für Hölzer höherer Festigkeitsklassen wird ein Schubnachweis für biegedrillknickgefährdete Stäbe wie beim Kippen dringend angeraten.

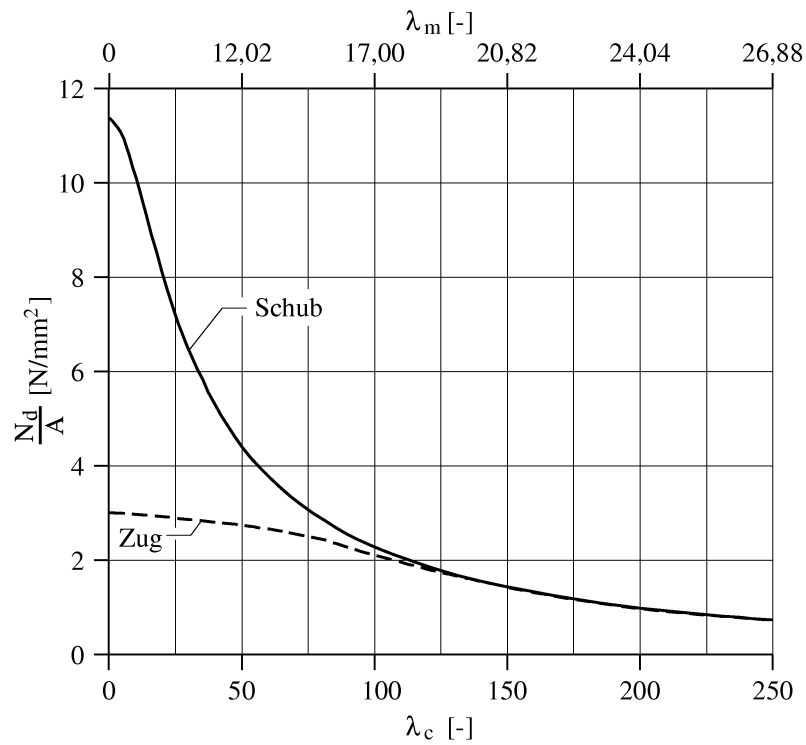


Bild 5.26: Auf Spannungsebene normierte Traglast von biegedrillknickgefährdeten Stäben mit $h/b = 10$ und $e_0 = h$ bei Zug- und bei Schubversagen

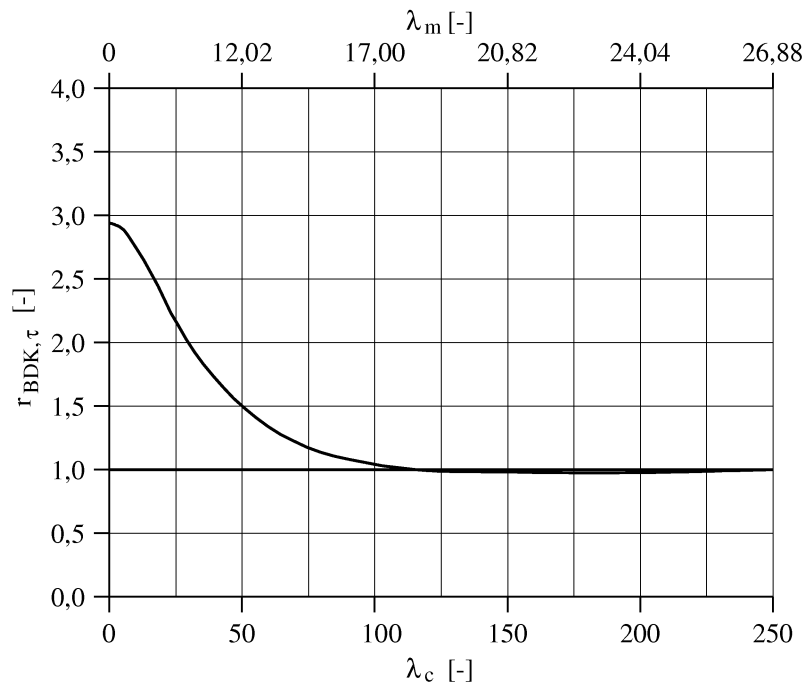


Bild 5.27: Verhältnisswert $r_{BDK,\tau}$ eines Kipp-Ersatzstabs mit $h/b = 10$ und $e_0 = h$

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass bei biegedrillknickgefährdeten Stäben gegenüber kippgefährdeten Stäben aufgrund der zusätzlich vorhandenen Normalkraft mit keiner zusätzlichen Abminderung der Schubtragfähigkeit gerechnet werden muss. Die Traglasten von biegedrillknickgefährdeten Stäben bei Erreichen der Schubfestigkeit steht in einem ähnlichen Verhältnis zur Traglast bei Erreichen der Zugfestigkeit wie bei kippgefährdeten Stäben.

Außerdem muss auch hier, wie schon in Kap. 5.4.4 für das Kippen angemerkt, bei Beanspruchung durch Querlasten, z.B. Beanspruchung durch senkrecht zur Stabachse einwirkende Einzel- oder Streckenlasten und Bemessung mit Hilfe der Kipp- und Knick-Ersatzstablänge, eine Überprüfung der Schubspannungen erfolgen. Diese werden erzeugt durch Torsionsmomente, die von den am verformten Stab angreifenden äußeren Lasten hervorgerufen werden. Die Schubspannungen dürfen die Schubfestigkeit nicht überschreiten. In Kap. 6 wird anhand eines Beispiels eine mögliche Vorgehensweise für die Bemessung dargestellt.

5.5.5 Biegedrillknickgefährdete Stäbe aus Brettschichtholz

Die Vorgehensweise der Untersuchung der drei Berechnungsmethoden (analytisch, numerisch und kombiniertes k_c - k_m -Verfahren) ist beim Biegedrillknicken gleich der beim Kippen (Kap. 5.4). Zunächst wird die Güte der analytischen Berechnung durch die numerische Methode unter Vernachlässigung des Volumeneffekts überprüft. Danach wird das vereinfachte Verfahren nach EN 1995:2005-12 bzw. DIN 1052:2004-08 mit der analytischen Berechnung unter Berücksichtigung des Volumeneffekts mittels des Beiwerts k_{red} verglichen.

Für die Vergleiche werden beispielhaft die Ergebnisse der Berechnungen von vier verschiedenen geometrischen und beanspruchungsspezifischen Kombinationen herangezogen. Es werden jeweils Stäbe mit den h/b -Verhältnissen 500mm/100mm und 1000mm/100mm untersucht. Diese werden jeweils durch Normalkräfte mit den Exzentrizitäten $e_0 = h$ und $e_0 = h/10$ beansprucht. Mit der Wahl dieser Beispiele soll die Schar der möglichen Kombinationen möglichst sinnvoll eingekreist werden. Die h/b -Verhältnisse fünf und zehn bilden näherungsweise obere und untere Grenzen der praktischen Nutzung. Für Stäbe mit h/b kleiner als fünf geht die Biegedrillknickgefährdung gegen Null. Stäbe mit einem Verhältnis von h/b größer als zehn finden in der Praxis höchst selten Verwendung. Die Exzentrizität $e_0 = h$ erzeugt bereits einen großen Biegeanteil, bei einer weiteren Vergrößerung der Exzentrizität geht das Biegedrillknicken in das Kippen über. Ähnlich verhält es sich bei der Exzentrizität $e_0 = h/10$. Wird diese unterschritten, nähert sich das Tragverhalten des biegedrillknickenden Stabes dem eines knickenden Stabes an. Dabei bilden die angenommenen Werte keine echten Grenzwerte. Über- bzw. Unterschreitungen sind auch bei weiter vorhandener Biegedrillknickgefährdung möglich. Es handelt sich also um realistische Kombinationen, die näherungsweise einen Einblick in verschiedene Randbereiche gewährleisten.

In Bild 5.28, Bild 5.29, Bild 5.30 und Bild 5.31 sind die auf die Normalspannungen normierten Traglasten nach analytischer (ohne Berücksichtigung von k_{red}) und numerischer Berechnung der vier genannten Beispiele dargestellt. In Bild 5.32 und Bild 5.33 ist der Verhältnisswert $r_{BDK,FEM}$, der das Verhältnis der numerischen ermittelten Traglast zur analytischen ermittelten angibt, für die Beispiele über den Knick- und Kipp-Schlankheiten angetragen. Für große Schlankheiten ergeben sich bei den Ergebnissen der beiden Berechnungsmethoden sehr gute Übereinstimmungen. Bei gedrunenen Stäben ergeben sich jedoch Abweichungen um bis zu 20 Prozent. Dabei ist die Tragfähigkeit nach numerischer Berechnung jeweils größer als die nach analytischer Berechnung. Grundsätzlich liegt die analytische Berechnung damit auf der sicheren Seite.

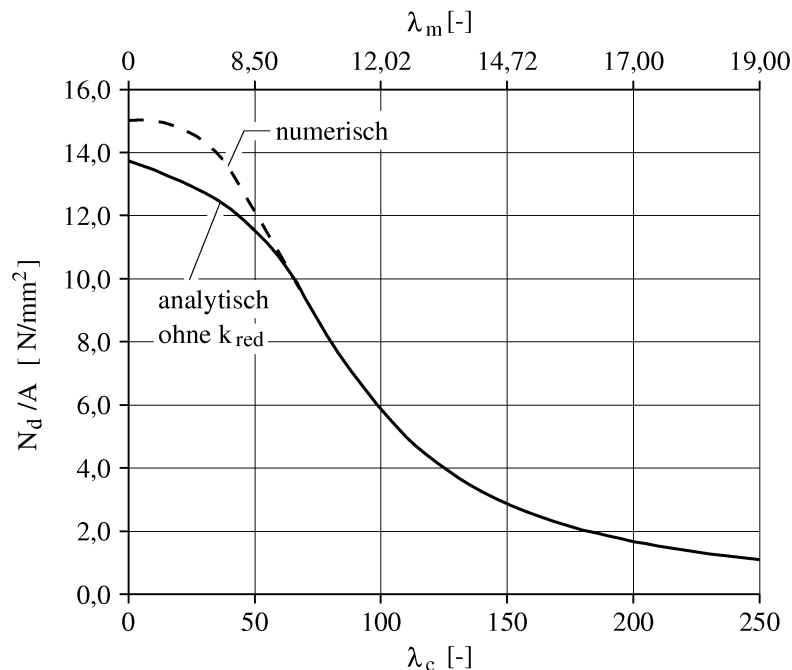


Bild 5.28: Normierte Traglasten biegedrillknickgefährdeter Stäbe nach numerischer und nach analytischer Berechnung mit $e_0 = h/10$ sowie $h/b=5$

Um die Ursachen für die Abweichungen zu erkennen, müssen die Ergebnisse genauer untersucht werden. Zunächst kann festgestellt werden, dass bei großen Exzentrizitäten die Abweichungen sehr viel weiter in den schlanken Bereich hineinreichen. Bei der hier untersuchten Exzentrizität von $e_0 = h$ reicht die Abweichung bis zu einer Kipp-Schlankheit λ_M von etwa 10 bis 12, bei der Exzentrizität von $e_0 = h/5$ reicht die Abweichung bis zu einer Kipp-Schlankheit λ_M von etwa 15 bis 17. Die Beträge der größten Abweichungen sind jedoch näherungsweise konstant bei 15 bis 20 Prozent.

In den Bereichen, in denen die Abweichungen festgestellt werden können, liegt kein echtes Stabilitäts-Versagen der Bauteile vor. Wie Kap. 5.4.5 entnommen werden kann, fangen

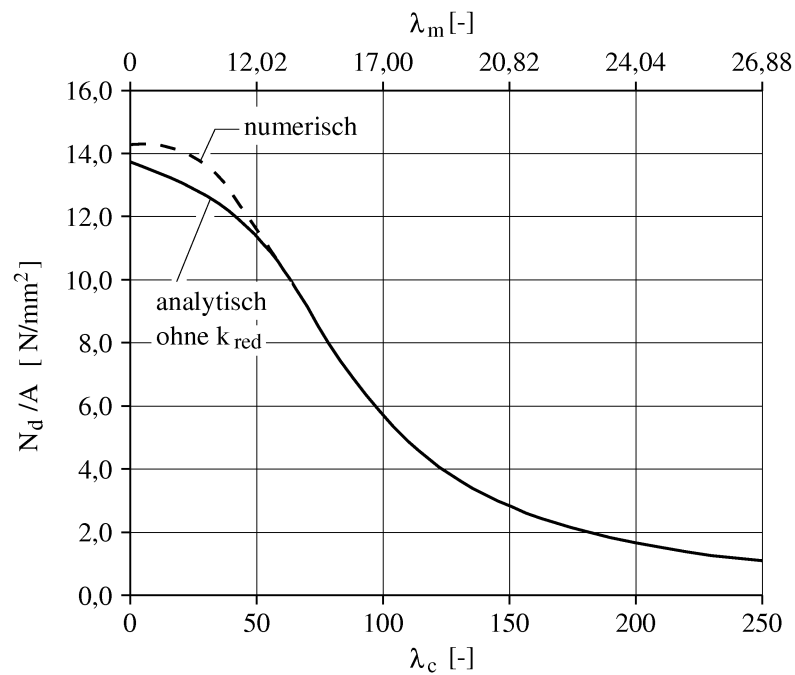


Bild 5.29: Normierte Traglasten biegedrillknickgefährdeter Stäbe nach numerischer und nach analytischer Berechnung mit $e_0 = h/10$ sowie $h/b=10$

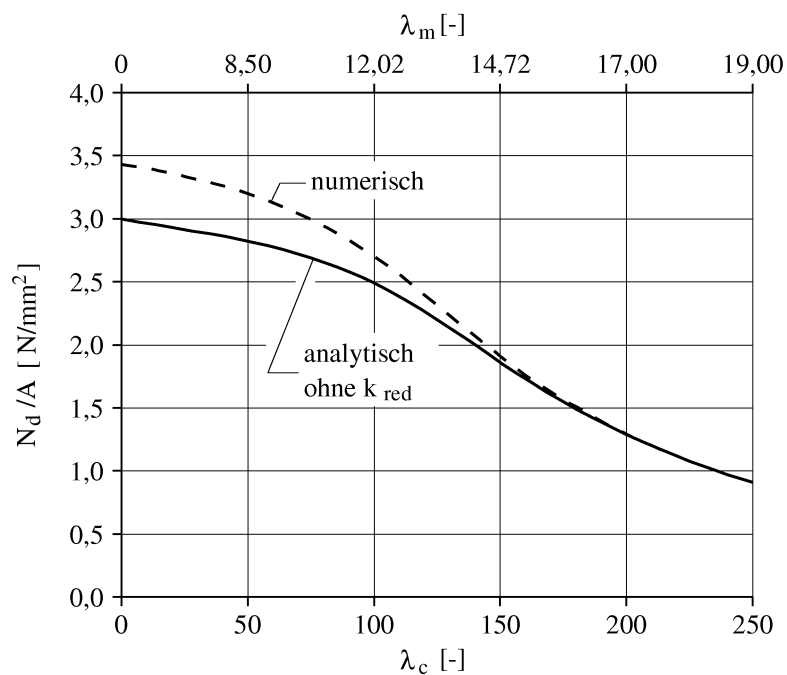


Bild 5.30: Normierte Traglasten biegedrillknickgefährdeter Stäbe nach numerischer und nach analytischer Berechnung mit $e_0 = h$ sowie $h/b=5$

Biegestäbe erst ab einer Kipp-Schlankheit λ_M von etwa 15 tatsächlich an, ihre Tragfä-

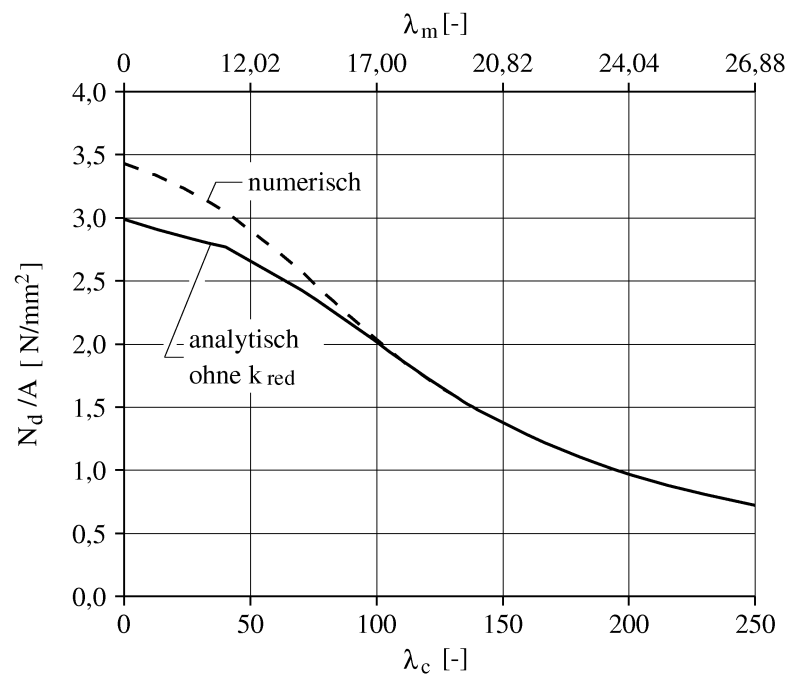


Bild 5.31: Normierte Traglasten biegedrillknickgefährdeter Stäbe nach numerischer und nach analytischer Berechnung mit $e_0 = h$ sowie $h/b=10$

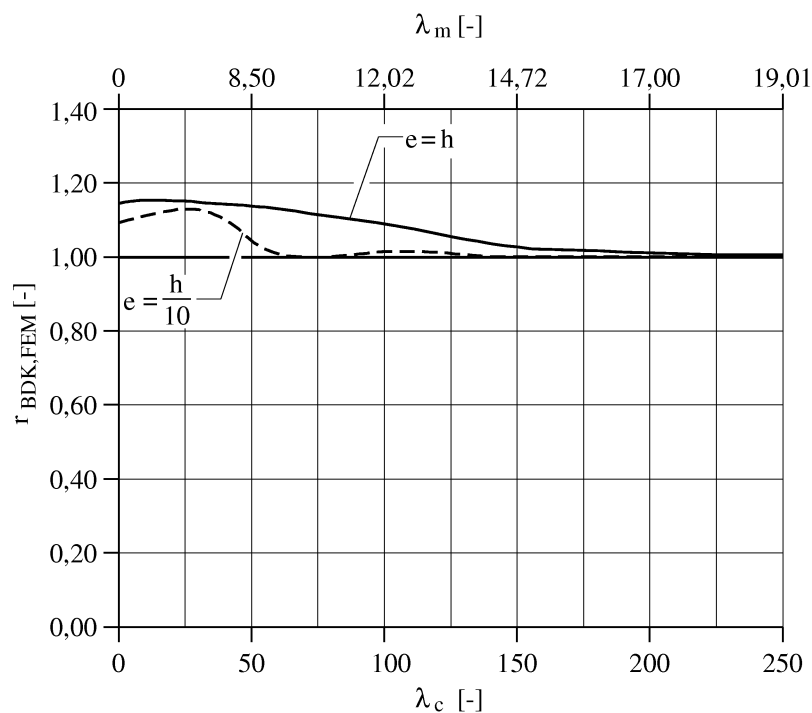


Bild 5.32: Verhältniswert $r_{BDK,FEM}$ von biegedrillknickgefährdeten Stäben mit $h/b = 10$

higkeit aufgrund des Stabilitätsversagens zu verlieren. Das Knicken der Bauteile kann

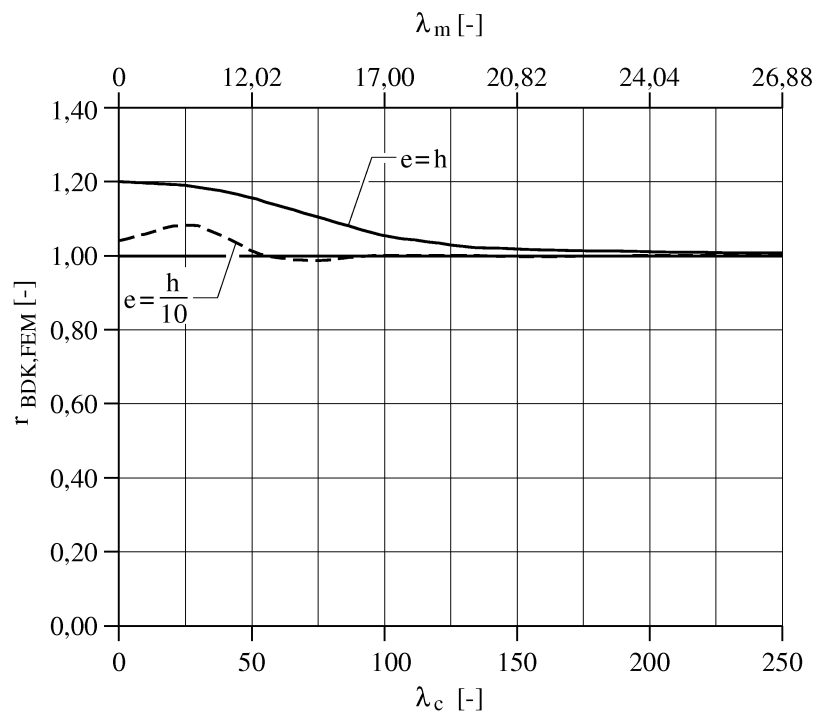


Bild 5.33: Verhältniswert $r_{BDK,FEM}$ von bиеgedrillknickgefährdeten Stäben mit $h/b = 5$

theoretisch schon früher eintreten. Allerdings sind die Normalkraftanteile geringer als beim reinen Druckstab, so dass das Knicken erst bei grösseren Schlankheiten eintritt. Ist die Exzentrizität kleiner, so ist der Normalkraftanteil größer und das Stabilitätsversagen Knicken tritt früher auf. Ist die Exzentrizität grösser, so tritt aufgrund des kleineren Normalkraftanteils das Knicken später auf.

In Kap. 5.3.8 wird der Schluss gezogen, dass beim Knicken die Querschnittstragreserve aufgebraucht wird, die nach analytischer Berechnung der Querschnittstragfähigkeit gegenüber der genormten quadratischen vorhanden ist (siehe auch Bild 5.12). Die Begründung dafür ist, dass aufgrund des Plastizierens des Querschnitts die Biegesteifigkeit des Bauteils herabgesetzt wird. Da dieser Effekt in der Bemessung keine Berücksichtigung findet, wird die Unterschätzung der Querschnittstragfähigkeit ausgeglichen. Tritt jedoch kein Stabilitätsversagen auf, so hat die Abminderung der Biegesteifigkeit keine Auswirkung auf die Tragfähigkeit des Bauteils. Die Tragreserve des Querschnitts gegenüber der quadratischen Annahme kommt voll zur Wirkung.

Die Bemessung nach dem analytischen Verfahren mit Hilfe der quadratischen Interaktionsannahme liefert also im Bereich gedrungener Stäbe Tragfähigkeiten, die so weit auf der sicheren Seite liegen, wie andere nicht stabilitätsgefährdete Bauteile mit kombinierter Druck- und Biegebeanspruchung auch.

In Bild 5.34, Bild 5.35, Bild 5.36 und Bild 5.37 sind die auf die Normalspannungen nor-

mierten Traglasten nach analytischer Berechnung (mit Berücksichtigung von k_{red}) und nach dem kombinierten k_c - k_m -Verfahren gegenübergestellt. In Bild 5.38 und Bild 5.39 ist der zugehörige Verhältniswert $r_{BDK,ErSt}$ über den Knick- und Kipp-Schlankheiten dargestellt. Es zeigt sich, dass die Traglasten, die mit dem kombinierten k_c - k_m -Verfahren erzielt werden können, stets deutlich unter denen liegen, die analytisch berechnet werden können. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass beim kombinierten k_c - k_m -Verfahren der Knickanteil, wie in Kap. 5.3.4 gezeigt wird, offenbar mit einer nur halb so großen Vorkrümmungsamplitude in Richtung der schwachen Achse eingeht, zeigen die Abweichungen der Ergebnisse noch deutlicher auf, dass mit dem kombinierten k_c - k_m -Verfahren nicht die vollen Tragreserven eines biegedrillknickgefährdeten Stabes ermittelt werden können. Die Bemessung solcher Bauteile mit dem kombinierten k_c - k_m -Verfahren ist demnach stark unwirtschaftlich.

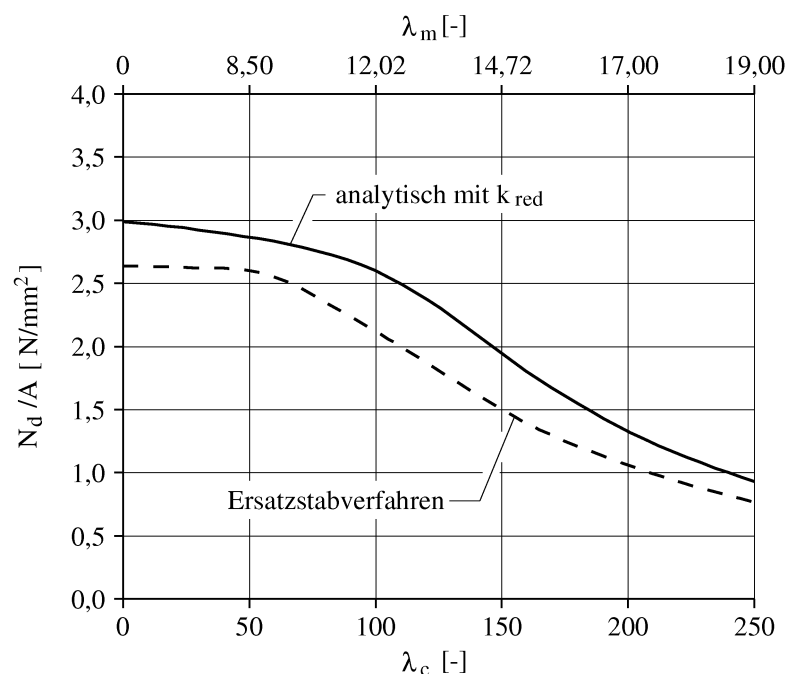


Bild 5.34: Normierte Traglasten biegedrillknickgefährdeter Stäbe nach analytischer Berechnung und nach dem kombinierten k_c - k_m -Verfahren mit $e_0 = h/10$ sowie $h/b=5$

In [13] haben Brüninghoff und Klapp 2005 einen Vorschlag für die Verbesserung des kombinierten k_c - k_m -Verfahrens bei Anwendung auf biegedrillknickgefährdete Stäbe unterbreitet. Eine Untersuchung dieses Vorschlags ist im Anhang in Kap. A.2 zu finden.

5.5.6 Einfluss der Imperfektionen exzentrische Lasteinleitung und Vorverdrehung

Die Einflüsse der Imperfektionen exzentrische Lasteinleitung a und Vorverdrehung ϑ_0 sind in Kap. 5.3 und Kap. 5.4 genauer untersucht worden. Die Exzentrizität der Lasteinleitung a hat nur einen Einfluss auf das Knicken. Die Vorverdrehung ϑ_0 beeinflusst nur

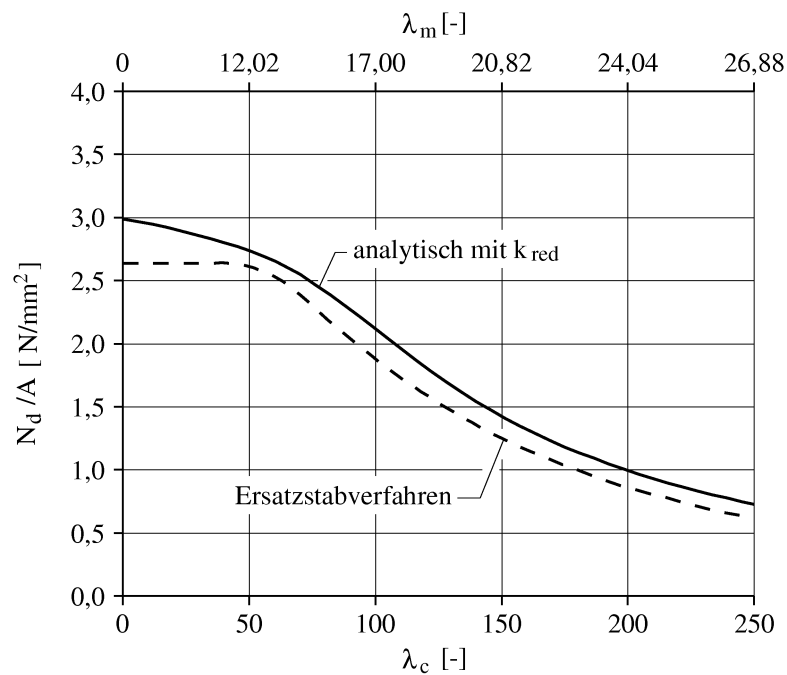


Bild 5.35: Normierte Traglasten biegedrillknickgefährdeter Stäbe nach analytischer Berechnung und nach dem kombinierten k_c - k_m -Verfahren mit $e_0 = h/10$ sowie $h/b=10$

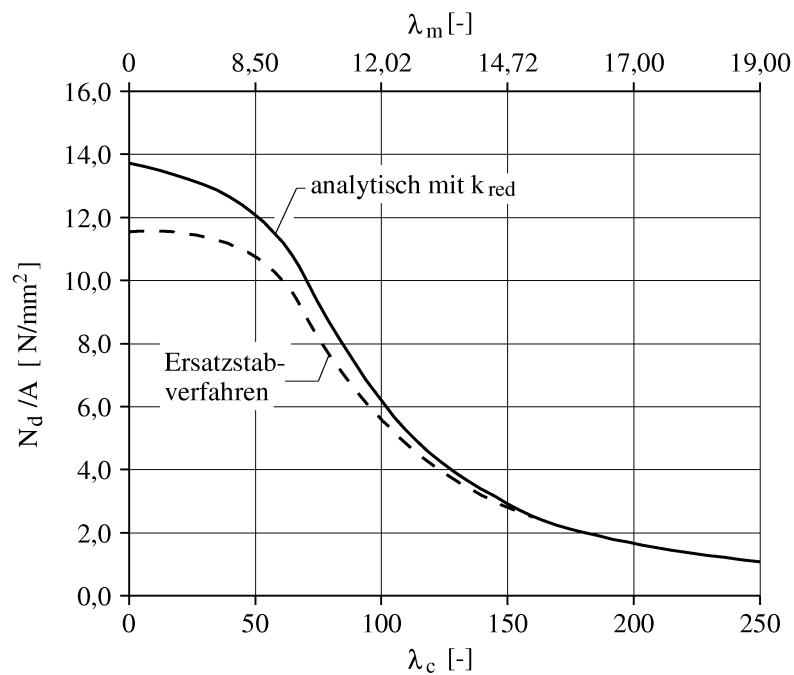


Bild 5.36: Normierte Traglasten biegedrillknickgefährdeter Stäbe nach analytischer Berechnung und nach dem kombinierten k_c - k_m -Verfahren mit $e_0 = h$ sowie $h/b=5$

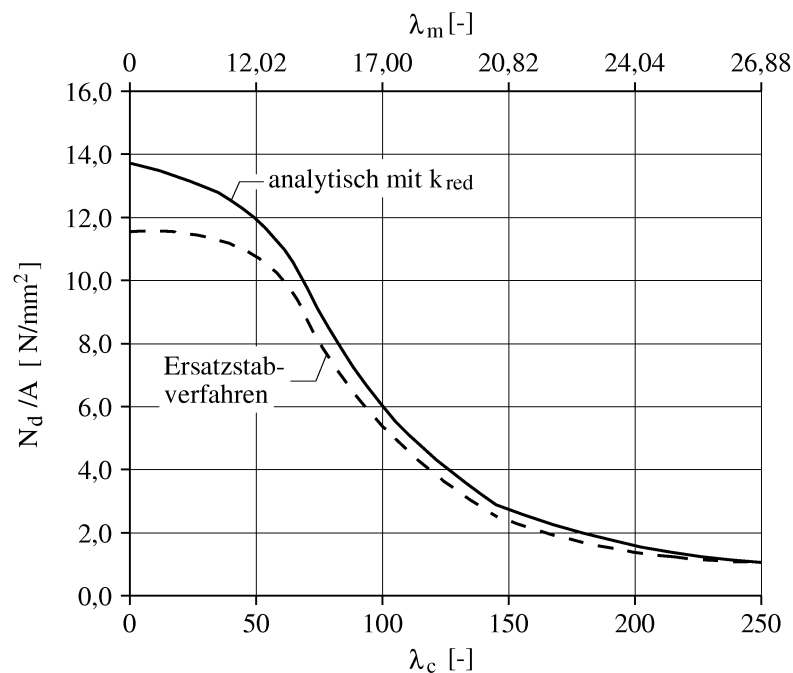


Bild 5.37: Normierte Traglasten biegedrillknickgefährdeter Stäbe nach analytischer Berechnung und nach dem kombinierten k_c - k_m -Verfahren mit $e_0 = h$ sowie $h/b=10$

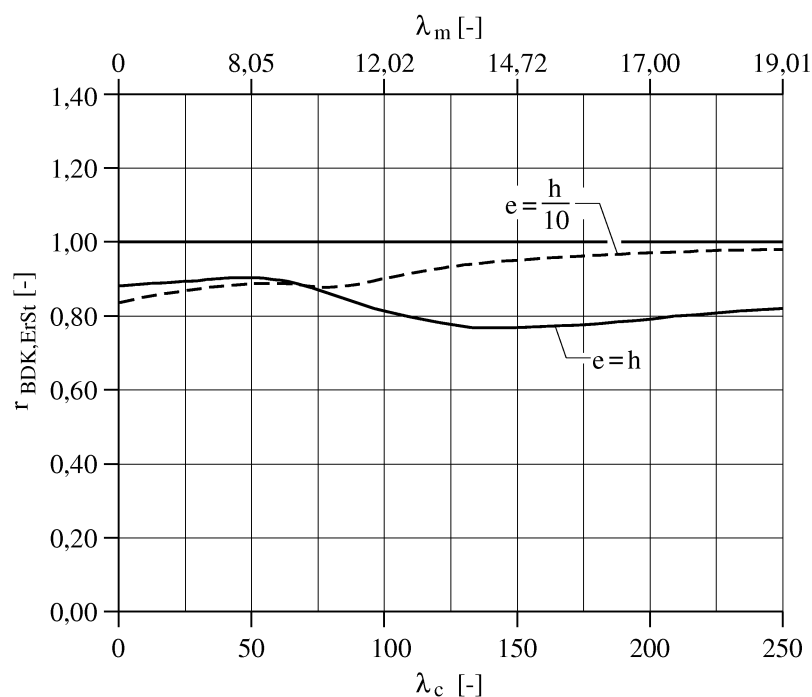
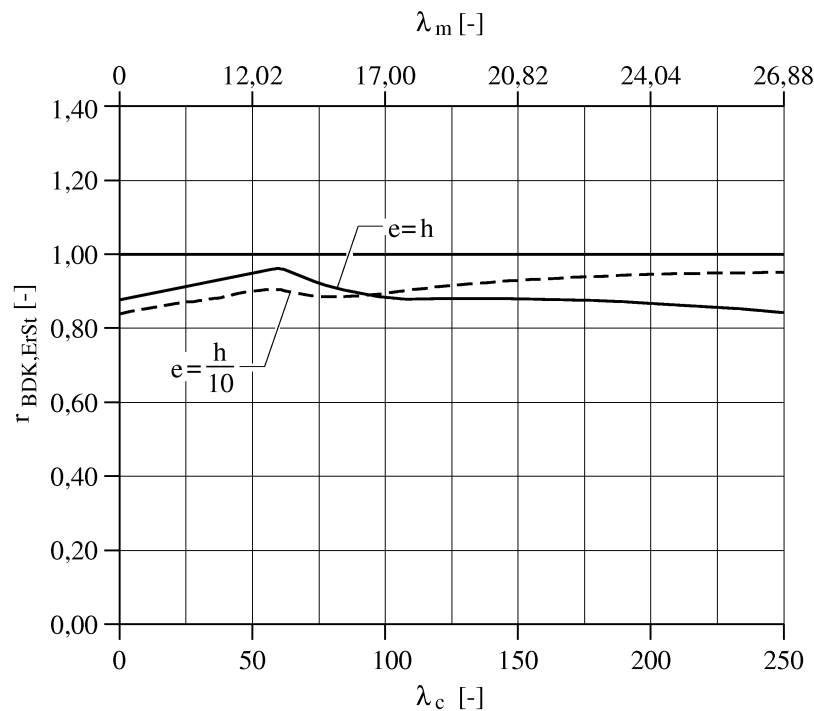


Bild 5.38: Verhältniswert $r_{BDK,ErSt}$ von biegedrillknickgefährdeten Stäben mit $h/b = 10$

das Kippen. Auf das Biegedrillknicken, das sowohl das Knicken als auch das Kippen beinhaltet, haben beide Imperfektionen einen Einfluss. Dabei ist zu beobachten, dass mit zu-

Bild 5.39: Verhältniswert $r_{BDK,ErSt}$ von biegedrillknickgefährdeten Stäben mit $h/b = 5$

nehmender Exzentrizität e_0 (die in Richtung der y-Achse, der Haupttragrichtung, exzentrisch ist) der Einfluss der exzentrischen Lasteinleitung a (die in Richtung der schwachen z-Achse exzentrisch ist) abnimmt, der Einfluss der Vorverdrehung ϑ_0 jedoch zunimmt. Der Einfluss der beiden Imperfektionen verstärkt sich also nicht gegenseitig. Die beiden Imperfektionen mindern gemeinsam die Tragfähigkeit gedrungener Stäbe für alle Normalkraft-Momenten-Beanspruchungskombinationen in etwa so, dass die Tragfähigkeit bei ihrer Berücksichtigung um 3 bis 5 Prozent abgemindert wird; genauso wie die Imperfektionen einzeln die Tragfähigkeit beim Knicken bzw. beim Kippen abmindern.

5.5.7 Erkenntnisse der Untersuchung

Wie schon beim Kippen kann auch für das Biegedrillknicken gezeigt werden, dass die analytisch ermittelten Traglasten mit Hilfe von Gl. (2.199) und Gl. (2.200) auf der sicheren Seite liegen. Die Tragfähigkeit bei Erreichen der Schubfestigkeit wird im Vergleich zum Kippen durch die Normalkraft nicht weiter herabgesetzt. Die Abweichungen zur Tragfähigkeit bei Erreichen der Zugfestigkeit sind etwa gleich. Die Anwendung des kombinierten k_c - k_m -Verfahrens als Ersatzstabverfahren für das Biegedrillknicken erweist sich als sehr ungenau. Die damit ermittelbaren Traglasten weichen stark von denen ab, die mit den analytischen Gleichungen ermittelt werden.

Die Bemessung mit Gl. (2.199) und Gl. (5.27) ergibt brauchbare Ergebnisse. Neben den schon beim Kippen in Kap. 5.4.7 erläuterten Vorteilen der analytischen Gleichungen, wie bessere Nachvollziehbarkeit und variable Handhabung der Eingangsparameter, kann bei

Anwendung der analytischen Gleichungen auf das Biegedrillknicken auch eine grössere Wirtschaftlichkeit der Bemessung erzielt werden, da die Bauteile besser ausgenutzt werden können.

6 Anwendung von Ersatzstablängen bei Holzbauteilen mit Querlasten

6.1 Allgemeines

Die Verwendung von Knick-Ersatzstablängen bei der Bemessung von Stäben mit ähnlichen Eigenformen hat sich als akzeptable Näherung erwiesen. Dabei wird die Ersatzstablänge durch Gleichsetzen der kritischen Last des zu untersuchenden Stabes mit der kritischen Last des Knick-Ersatzstabs (Eulerstab II) ermittelt. Die Beanspruchbarkeit des zu untersuchenden Stabs kann dann näherungsweise am Ersatzstab mit der zugehörigen Knick-Ersatzstablänge ermittelt werden. Für das Kipp-Problem wird diese Vorgehensweise analog übernommen. In Kap. 2.2.6 wird beispielhaft für den Kragarm mit Einzellast die kritische Last (Gl. (2.181)) nach Prandtl [58] berechnet und in Gl. (2.182) die Ersatzstablänge ermittelt. In Kap. 2.3.3 wird festgestellt, dass beim Biegedrillknick-Problem die Ersatzstablängen für das Kippen und Knicken nur kombiniert verwendet werden können.

Im Laufe der Untersuchungen in dieser Arbeit hat sich herausgestellt, dass bei der Bemessung von kippgefährdeten Stäben ab einer bestimmten Kipp-Schlankheit die Schubtragfähigkeit maßgebend wird. Allerdings konnte festgestellt werden, dass die Abweichungen von der Tragfähigkeit bei Erreichen der Zugfestigkeit gering sind. Es ist jedoch damit nicht unmittelbar klar, dass dieser Zusammenhang auch gegeben ist, wenn ein kippgefährdeter Stab mit seiner Ersatzstablänge bemessen werden soll. Vor allem dann nicht, wenn der zu bemessende Stab durch eine Querlast beansprucht wird. Aufgrund der Verschiebung des Stabes in Richtung der y-Achse und auch aufgrund der Verdrillung des Stabes um die Längsachse bekommt die außen angreifende Querlast einen Hebelarm, wodurch ein Torsionsmoment erzeugt wird. In diesem Kapitel soll anhand des bereits in Kap. 2.2.6 und Kap. 2.3.3 untersuchten beispielhaften Stabes überprüft werden, ob durch dieses zusätzliche Torsionsmoment eine Bemessung solcher querbelasteter Stäbe auf Schub dringend angeraten werden muss.

In einem weiteren Schritt wird in diesem Kapitel (ebenfalls an dem bereits genannten Beispiel aus Kap. 2.3.3) untersucht, ob die kombinierte Anwendung der Knick- und Kipp-Ersatzstablängen in der Bemessung zu brauchbaren Ergebnissen führt. Dies ist notwendig, da hierzu aktuell noch keine Untersuchungen angestellt wurden.

6.2 Ersatzstablängen von biegebeanspruchten Holzbauteilen

Für den in Bild 6.1 dargestellten einseitig eingespannten Stab mit vertikaler Einzellast werden in diesem Kapitel die Traglasten bei Erreichen der Zug- und der Schubfestigkeit ermittelt, auf der Grundlage der in Kap. 2.2.5 hergeleiteten analytischen Gleichungen

für die Momente und Verformungen und mit Hilfe der in Kap. 2.2.6 ermittelten Kipp-Ersatzstablänge. Zur Überprüfung werden die Traglasten zusätzlich an einem FE-Modell mit den in Kap. 5.2.2 erläuterten Annahmen berechnet.

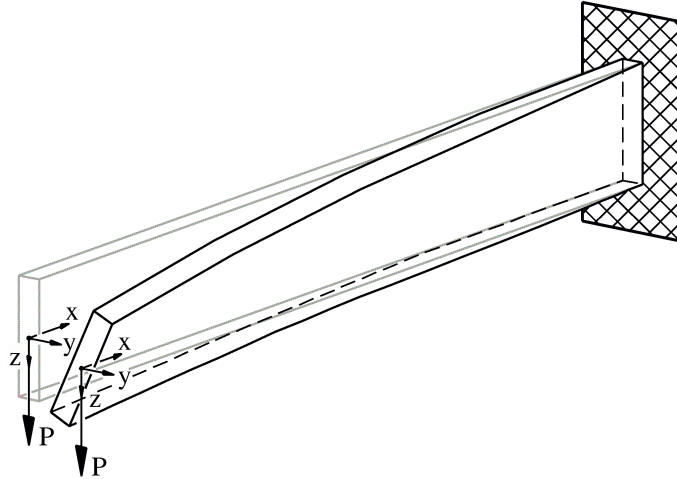


Bild 6.1: Rechteckiger, einseitig eingespannter Stab mit Einzelast

Die Traglast bei Erreichen der Zugfestigkeit kann analytisch berechnet werden durch Ermittlung des zusätzlichen Moments um die schwache Achse mit Hilfe von Gl. (5.16) mit den Ersatzstablängen nach Gl. (2.182) und Gl. (2.223) sowie durch Einsetzen des Moments in die Bemessungsgleichung Gl. (5.15). Dies geschieht analog zu der Ermittlung der Traglast am Kipp-Ersatzstab in Kap. 5.4 durch die Gleichung

$$M_z = N_{crit} \cdot v_0 \cdot \frac{\alpha_M^2}{1 - \alpha_M^2} \quad (6.1)$$

für das Moment um die schwache Achse. Darin wird die kritische Last mit

$$N_{crit} = EI_z \cdot \frac{\pi^2}{\ell_{c,ef}^2} \quad (6.2)$$

und der Ausnutzungsgrad für das Moment mit

$$\alpha_M = \frac{M_y \cdot \ell_{m,ef}}{\pi \cdot \sqrt{GI_x EI_z}} \quad (6.3)$$

angenommen. Für dieses Beispiel ergeben sich die Werte für die Ersatzstablängen (siehe auch Tab. A.1 und Tab. A.2) zu

$$\ell_{c,ef} = 2 \cdot \ell \quad (6.4)$$

$$\ell_{m,ef} = 0,783 \cdot \ell. \quad (6.5)$$

Als Imperfektionen müssten nach Norm die Schiefstellung mit dem Verdehwinkel $1/200$ und eine sinusförmige Vorkrümmung mit der Amplitude $v_0 = \ell/400$ überlagert angenommen werden. Vereinfachend wird hier eine einfache Vorkrümmung mit der Amplitude $v_0 = \ell/200$ in Form einer Sinushalbwellen als Imperfektion angenommen. Diese Vereinfachung ist sinnvoll, da die vereinfachte Form der Imperfektion nur geringfügig von der nach Norm korrekten abweicht. Die in Kap. 2.2.6 und Kap. 2.3.3 gefundenen analytischen Lösungen der Stabilitätsprobleme wurden ebenfalls unter Berücksichtigung der vereinfachten Imperfektionsannahme ermittelt, sodass die dort ebenfalls ermittelten Ersatzstablängen hier verwendet werden können.

Die Ermittlung der Tragfähigkeit bei Erreichen der Zugfestigkeit mit dieser Methode stellt eine Näherung dar, weil die größten Momente um die y- und um die z-Achse nicht an der selben Stelle des Stabes auftreten. Dadurch werden die Tragfähigkeiten unterschätzt und liegen daher auf der sicheren Seite.

Für die Ermittlung der Traglast bei Erreichen der Schubfestigkeit muss abweichend von der Vorgehensweise in Kap. 5.4 eine Überlagerung der Schubbeanspruchung aus Torsion mit derjenigen aus Querkraft nach Gl. (3.5) erfolgen. Außerdem muss bei der Ermittlung des Torsionsmoments die Verformung in Richtung der schwachen Achse berücksichtigt werden. Dies ist notwendig, weil die Einzellast mit der Verformung als Hebelarm das vorhandene Torsionsmoment erzeugt. Durch Verwendung von Gl. (2.155) zur Ermittlung der Verformung v_{el} kann für das Torsionsmoment die Gleichung

$$M_x = P_d \cdot (v_{el} + v_0) = P_d \cdot v_0 \cdot \frac{1}{1 - \alpha_M^2} \quad (6.6)$$

mit α_M nach Gl. (6.3) angesetzt werden. Auch hier wird der Vorkrümmung in Form einer Sinushalbwellen für einen einseitig eingespannten Stab mit der Amplitude $v_0 = \ell/200$ verwendet.

Bei dem zur Überprüfung herangezogenen FE-Modell wird eine sinusförmige Vorkrümmung ebenfalls mit einer Amplitude von $v_0 = \ell/200$ aufgebracht. Auf die Untersuchung der Auswirkung einer Vorverdrillung wird hier verzichtet.

Durch die Vergleichsrechnungen, die mit der FEM an Stäben mit dem Querschnitt $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ durchgeführt werden, können die analytisch nach den oben angegebenen Gleichungen ermittelten Ergebnisse bestätigt werden. Die Tragfähigkeit bei Erreichen der Schubfestigkeit liegt numerisch berechnet immer knapp über der analytisch ermittelten. Die Tragfähigkeiten bei Erreichen der Zugfestigkeit liegen numerisch errechnet zum Teil knapp unter den analytisch ermittelten. Die Abweichung ist sehr gering. In Bild 6.2 und Bild 6.3 sind die Ergebnisse gegenübergestellt.

Die Gegenüberstellung der Tragfähigkeiten bei Erreichen der Zug- und der Schubfestigkeiten zeigt eine deutliche Abweichung zu den Ergebnissen, die beim beidseitig durch

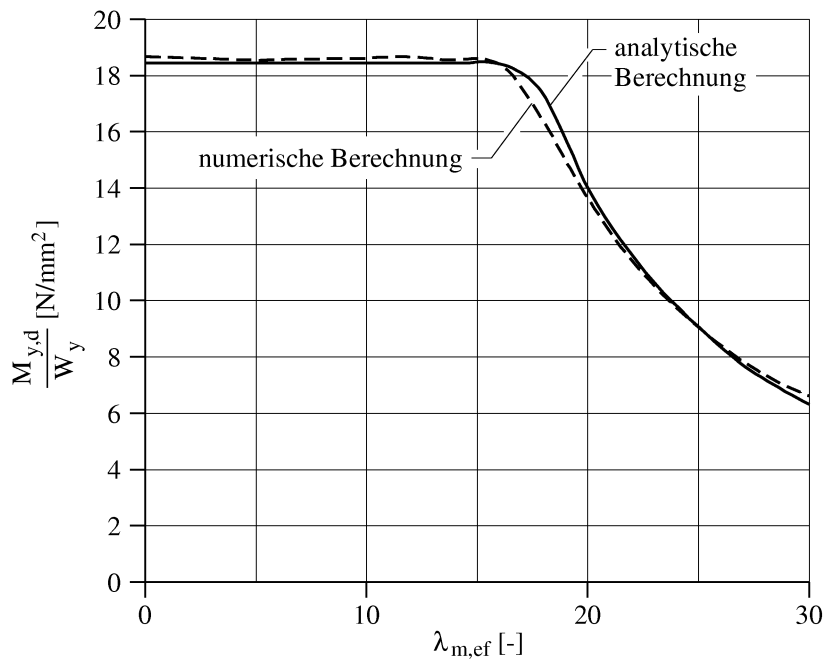


Bild 6.2: Analytisch und numerisch ermittelte Traglasten von kipp-gefährdeten Stäben nach Bild 6.1 mit $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ bei Erreichen der Zugfestigkeit

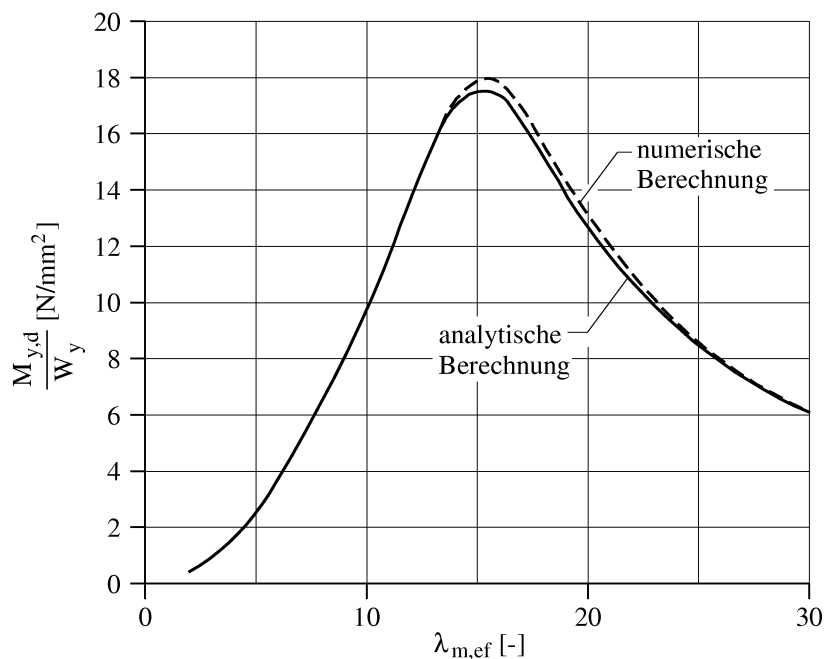


Bild 6.3: Analytisch und numerisch ermittelte Traglasten von kipp-gefährdeten Stäben nach Bild 6.1 mit $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ bei Erreichen der Schubfestigkeit

Momente beanspruchten Stab ermittelt werden können. Auch bei Stäben mit einer kleinen Kipp-Schlankheit ist die Tragfähigkeit bei Erreichen der Schubfestigkeit maßgebend. Die

Tragfähigkeit bei Erreichen der Zugfestigkeit wird nur bei Stäben mit einem Verhältnis $h/b \leq 10$ in Teilbereichen kleiner als die Tragfähigkeit bei Erreichen der Schubfestigkeit. In Bild 6.4 sind die Tragfähigkeiten für Stäbe mit dem Querschnitt $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ und in Bild 6.5 für Stäbe mit dem Querschnitt $h/b = 500\text{mm}/100\text{mm}$ dargestellt. In Bild 6.6 und Bild 6.7 ist jeweils der Quotient der Tragfähigkeiten r_t , der das Verhältnis der Schub- zur Zugtragfähigkeit angibt, in Abhängigkeit von der Kipp-Schlankheit für die beiden untersuchten h/b -Verhältnisse dargestellt.

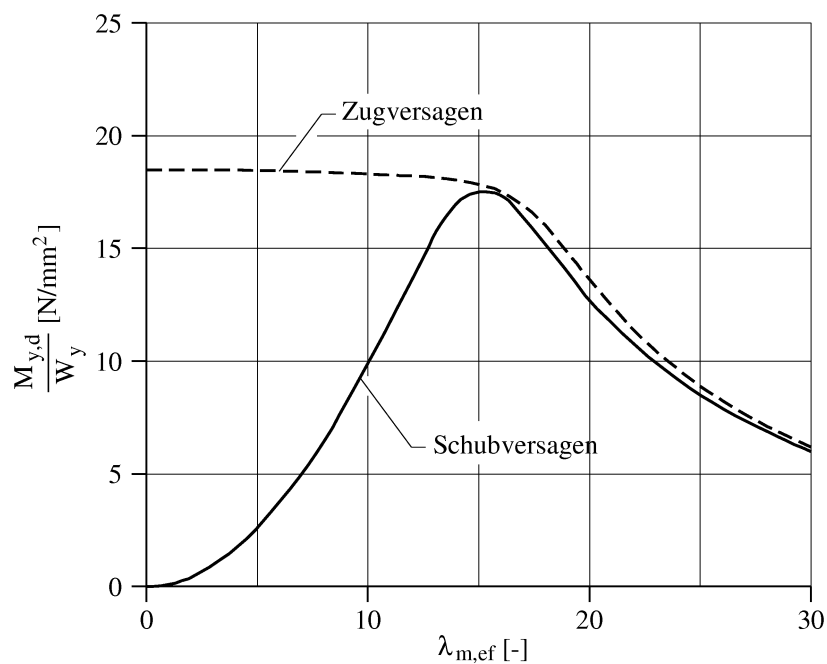


Bild 6.4: Analytisch mit Hilfe von Ersatzstablängen ermittelte Traglasten von kippgefährdeten Stäben nach Bild 6.1 mit $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ bei Erreichen der Zug- und der Schubfestigkeit

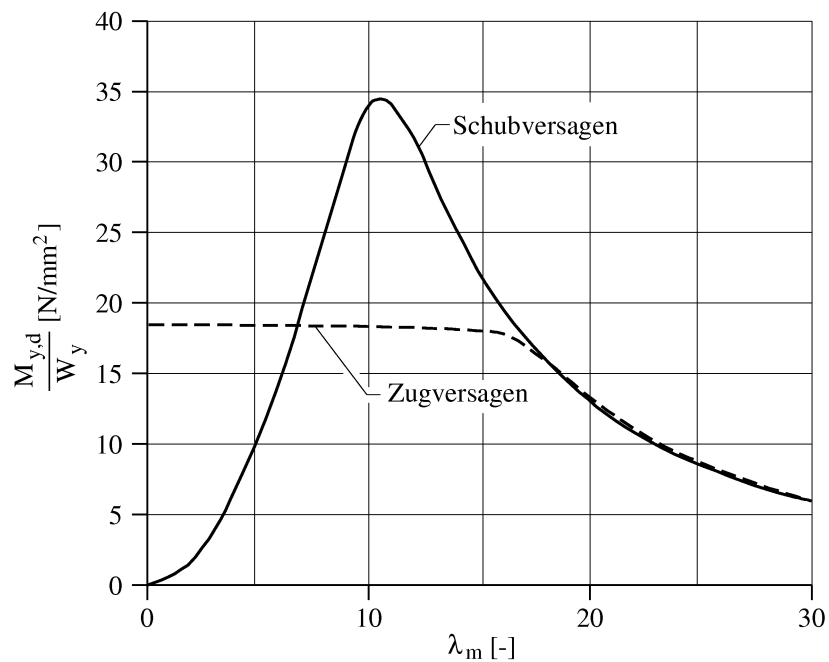


Bild 6.5: Analytisch mit Hilfe von Ersatzstablängen ermittelte Traglasten von kippgefährdeten Stäben nach Bild 6.1 mit $h/b = 500\text{mm}/100\text{mm}$ bei Erreichen der Zug- und der Schubfestigkeit

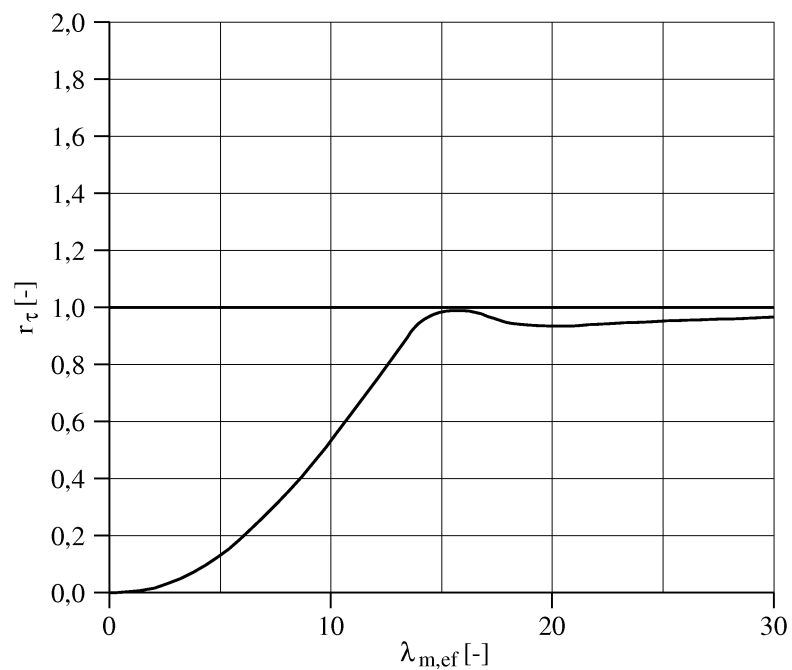


Bild 6.6: Verhältnisswert r_τ für kippgefährdete Stäbe mit $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$

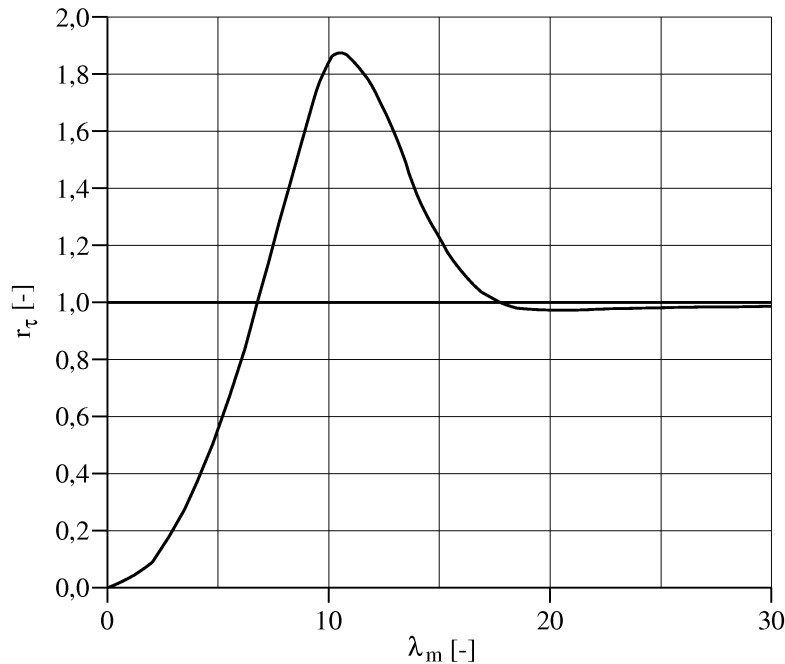


Bild 6.7: Verhältnisswert r_τ für kipgefährdete Stäbe mit $h/b = 500\text{mm}/100\text{mm}$

6.3 Ersatzstablängen von druck- und biegebeanspruchten Holzbauteilen

Bei der Untersuchung des einseitig eingespannten Stabs mit vertikaler Einzellast und zentrisch eingeleiteter Normalkraft geht es nicht mehr hauptsächlich darum herauszufinden, wann und ob die Tragfähigkeit bei Erreichen der Schubtragfähigkeit unter der bei Erreichen der Zugtragfähigkeit liegt. Es kann angenommen werden, dass die Erkenntnis, die beim Ersatzstab bezüglich der Schubtragfähigkeit bei kombinierter Druck- und Biegebeanspruchung erzielt werden konnte, auch für den einseitig eingespannten Stab gilt: die zusätzliche Normalkraft vermindert die Tragfähigkeit bei Erreichen der Schubfestigkeit nicht.

Vielmehr wird untersucht, ob die Bemessung unter Verwendung der Ersatzstablängen $\ell_{m,ef}$ und $\ell_{c,ef}$ zu brauchbaren Ergebnissen führt. Dabei werden sowohl der Schub- als auch der Zugnachweis überprüft.

Für die analytische Ermittlung der Tragfähigkeit bei Erreichen der Zugfestigkeit muss zunächst das Moment um die z-Achse nach Gl. (2.199) mit Hilfe der Ersatzstablängen nach Gl. (6.4) und Gl. (6.5) durch die Gleichung

$$M_z = N_{crit} \cdot v_0 \cdot \frac{\alpha_M^2 + \alpha_N}{1 - \alpha_N - \alpha_M^2} \quad (6.7)$$

unter Vernachlässigung der Vorverdrillung ϑ_0 ermittelt werden. Im Anschluss können die

Momente M_y und M_z sowie die Normalkraft in die Bemessungsgleichung Gl. (5.27) eingesetzt werden.

Für die analytische Ermittlung der Tragfähigkeit bei Erreichen der Schubfestigkeit, muss wie in Kap. 6.2 zunächst die Verschiebung v_{el} bestimmt werden. Das kann durch Gl. (2.197) erfolgen, die unter Vernachlässigung der Vorverdrillung ϑ_0 zu

$$v_{el} = v_0 \cdot \frac{\alpha_M^2 + \alpha_N}{1 - \alpha_N - \alpha_M^2} \quad (6.8)$$

vereinfacht werden kann. Das Torsionmoment lässt sich durch die Gleichung

$$M_x = P_d \cdot (v_0 + v_{el}) = P_d \cdot v_0 \cdot \frac{1}{1 - \alpha_N - \alpha_M^2} \quad (6.9)$$

berechnen und in die Bemessungsgleichung Gl. (5.19) einsetzen.

Als Amplitude der Vorkrümmung ist auch hier sowohl für den Zug- als auch für den Schubnachweis $v_0 = \ell/200$ anzunehmen.

Zur Überprüfung der Methode werden die Traglasten für einseitig eingespannte Stäbe verschiedener Schlankheit ermittelt. Dabei wird zunächst mit Hilfe der FEM berechnet, wie groß die Lasten N_d (Normalkraft) und $P_{d,FEM}$ (vertikale Einzellast) bei Erreichen der Zug- bzw. der Schubfestigkeit werden können, unter der Annahme, dass beide Lasten N_d und $P_{d,FEM}$ genau den gleichen Betrag aufweisen. Danach wird die vertikale Last $P_{d,Analyse}$ ermittelt, die nach analytischer Berechnung mit Hilfe der Ersatzstablängen bei zusätzlicher Belastung durch das mit Hilfe der FEM berechnete N_d aufgebracht werden kann. Die Ergebnisse sind in Tab. 6.1 und in Tab. 6.2 dargestellt.

| ℓ [mm] | $\lambda_{c,ef}[-]$ | $\lambda_{m,ef}[-]$ | N_d [kN] | $P_{d,FEM}$ [kN] | $P_{d,Analyse}$ [kN] |
|-------------|---------------------|---------------------|------------|------------------|----------------------|
| 3000 | 162,6 | 15,3 | 75,2 | 75,2 | 74,5 |
| 4500 | 243,8 | 18,8 | 37,2 | 37,2 | 36,1 |
| 6000 | 325,1 | 21,7 | 21,6 | 21,6 | 20,9 |
| 7500 | 406,4 | 24,2 | 14,1 | 14,1 | 13,5 |
| 9000 | 487,7 | 26,6 | 9,9 | 9,9 | 9,5 |

Tabelle 6.1: Traglasten von biedrillknick-gefährdeten Stäben nach Bild 6.1 mit $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ bei Erreichen der Schubfestigkeit

In einer weiteren Untersuchung werden Stäbe gleicher Länge mit verschiedenen Verhältnissen von Normalkraft zur vertikalen Last auf ihre Traglast überprüft. Auch hier werden wieder die Traglasten bei Erreichen der Zug- und der Schubfestigkeit jeweils mit der FEM und der analytischen Methode unter Verwendung der Ersatzstablängen ermittelt. Als Beispiel wird ein Stab wieder mit dem Verhältnis $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ sowie mit der Länge

| ℓ [mm] | $\lambda_{c,ef}$ [-] | $\lambda_{m,ef}$ [-] | N_d [kN] | $P_{d,FEM}$ [kN] | $P_{d,Analyse}$ [kN] |
|-------------|----------------------|----------------------|------------|------------------|----------------------|
| 3000 | 162,6 | 15,3 | 80,8 | 80,8 | 75,9 |
| 4500 | 243,8 | 18,8 | 39,1 | 39,1 | 37,2 |
| 6000 | 325,1 | 21,7 | 22,5 | 22,5 | 21,5 |
| 7500 | 406,4 | 24,2 | 14,6 | 14,6 | 13,9 |
| 9000 | 487,7 | 26,6 | 10,4 | 10,4 | 9,6 |

Tabelle 6.2: Traglasten von biedrillknick-gefährdeten Stäben nach Bild 6.1 mit $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ bei Erreichen der Zugfestigkeit

6000mm verwendet. Die Ergebnisse sind in Bild 6.8, Bild 6.9, Bild 6.10 und Bild 6.11 dargestellt.

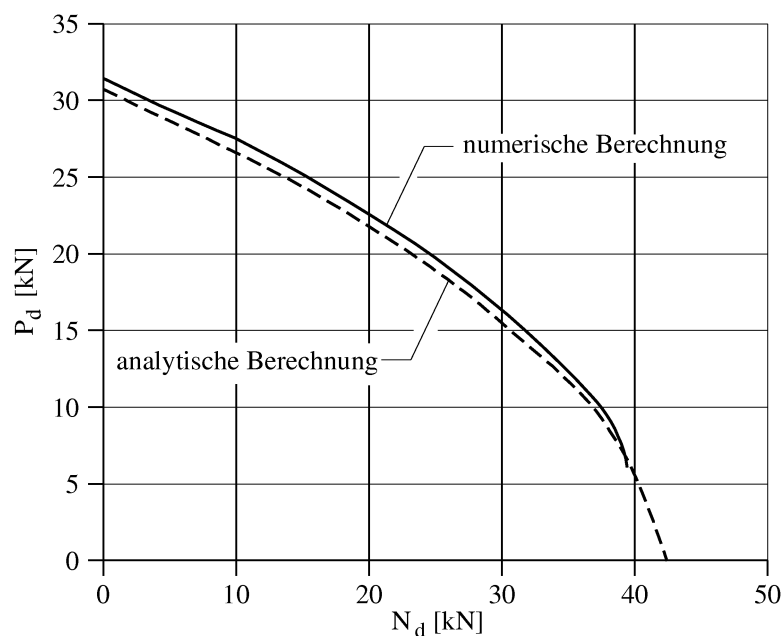


Bild 6.8: Traglastkombinationen eines einseitig eingespannten Stabes mit $\ell = 6\text{m}$ und $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ bei Erreichen der Schubfestigkeit nach analytischer und numerischer Berechnung

Sie zeigen, dass die mit Hilfe der Ersatzstablängen analytisch ermittelten Traglasten eine gute Übereinstimmung mit den am FE-Modell numerisch errechneten aufweisen. Dabei liegen die analytischen Ergebnisse immer leicht unter den numerischen. Außerdem kann festgestellt werden, dass auch bei biedrillknick-gefährdeten, einseitig eingespannten Stäben mit Einzellast am freien Rand ein ähnlicher Zusammenhang zwischen dem Erreichen der Schub- und der Zugfestigkeit vorhanden ist wie bei den kipp-gefährdeten Stäben mit gleichen Randbedingungen.

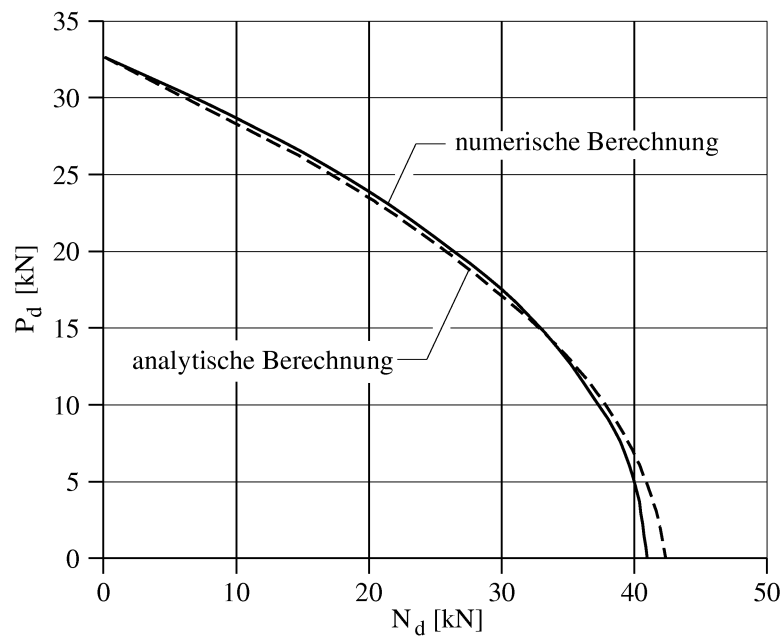


Bild 6.9: Traglastkombinationen eines einseitig eingespannten Stabes mit $\ell = 6\text{m}$ und $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ bei Erreichen der Zugfestigkeit nach analytischer und numerischer Berechnung

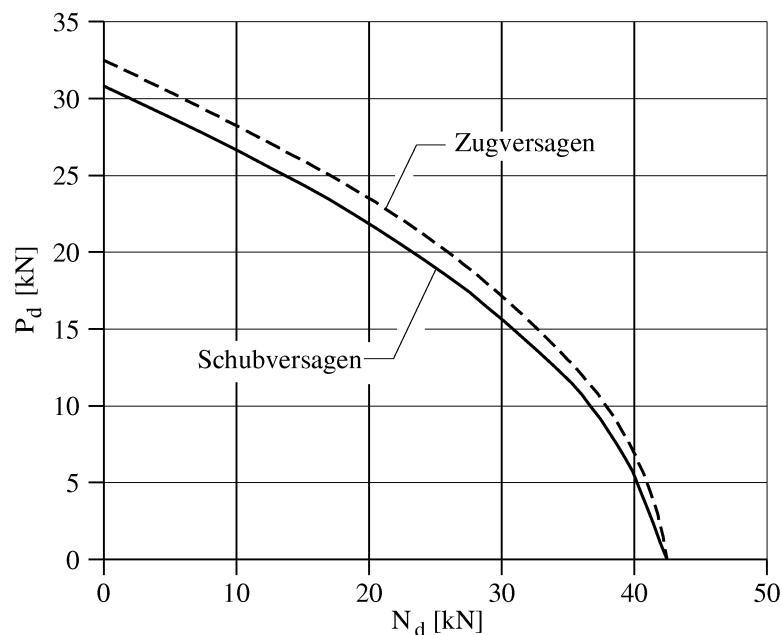


Bild 6.10: Traglastkombinationen eines einseitig eingespannten Stabes mit $\ell = 6\text{m}$ und $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ bei Erreichen der Zug- und der Schubfestigkeit nach analytischer Berechnung

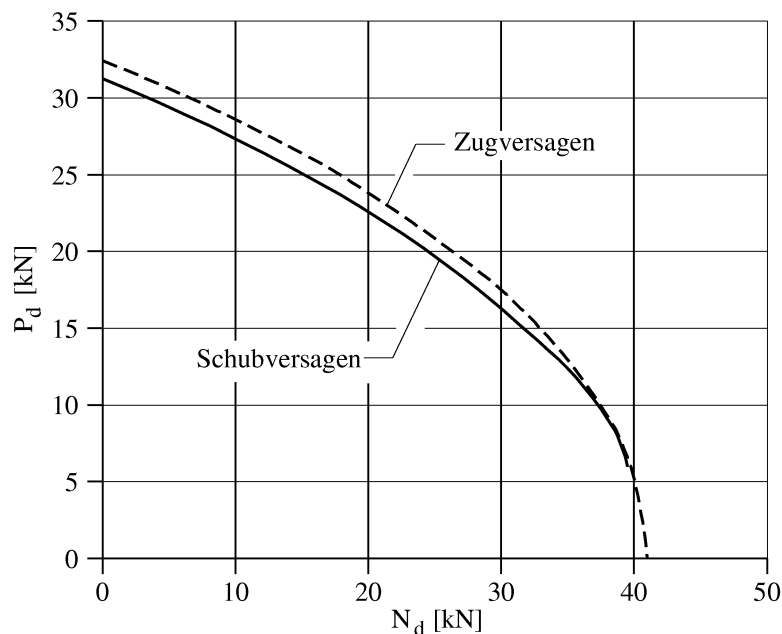


Bild 6.11: Traglastkombinationen eines einseitig eingespannten Stabes mit $\ell = 6\text{m}$ und $h/b = 1000\text{mm}/100\text{mm}$ bei Erreichen der Zug- und der Schubfestigkeit nach numerischer Berechnung

6.4 Erkenntnisse der Untersuchung

Anhand des hier untersuchten Beispiels wird gezeigt, dass druck- und biegebeanspruchte Stäbe, die vom Ersatzstab, dem beidseitig gabelgelagerten durch äußere Momente beanspruchten Stab nach Bild 2.11, abweichen, mit Hilfe der analytischen Berechnung der zusätzlich auftretenden Momente M_z nach Gl. (6.7) und M_x nach Gl. (6.9) mit guter Näherung bemessen werden können. Grund dafür ist, dass die zur kritischen Last gehörigen Eigenformen der beiden untersuchten Modelle ähnliche sind. Das Ergebnis legt nahe, dass auch andere Modelle mit ähnlichen Eigenformen mit der hier beschriebenen Methode bemessen werden können.

Allerdings gibt dieses Beispiel tatsächlich nur einen Hinweis darauf, dass die Methode auch auf andere biegedrillknick-gefährdete Modelle übertragbar ist. Eine Untersuchung weiterer Modelle kann im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht geleistet werden. Es wird empfohlen, für einige in der Praxis üblich Modelle eine solche Untersuchung in der Zukunft durchzuführen.

7 Bemessungskonzept für druck- und biegebeanspruchte Holzbauteile

7.1 Allgemeines

In diesem Kapitel werden die Erkenntnisse dieser Arbeit zu einem Bemessungskonzept für Holzbauteile, die durch Druck, Biegung oder einer Kombination von Druck und Biegung beansprucht werden, zusammengefasst.

7.2 Imperfektionsannahmen

Die für die Bemessung von Bauteilen mit Stabilitätsversagen getroffenen Imperfektionsannahmen, haben einen großen Einfluss auf die durch äußere Lasten erzeugten Beanspruchungen im Bauteil. Daher kommt der Wahl von Form und Größe der Imperfektionen eine große Bedeutung zu.

Einen Einfluss auf die hier untersuchten Bauteile haben die Vorkrümmung um die schwache Achse v_0 , die Vorverdrillung um die Stablängsachse ϑ_0 und die Exzentrizität a der Lasteinleitung in Richtung der y -Achse.

In den aktuellen Normen werden die Imperfektionen ϑ_0 und a nicht berücksichtigt. Da im Rahmen dieser Arbeit festgestellt werden konnte, dass diese Imperfektionen nur einen Einfluss auf gedrungene Bauteile haben, wird auch hier empfohlen, diese Imperfektionen nicht in die Bemessung einfließen zu lassen. Die Nichtberücksichtigung dieser Imperfektionen ist eine allgemein den Holzbau betreffende Annahme. Sie kann durch sinnvolle Annahmen in der Gesamtheit des Sicherheitskonzepts kompensiert werden.

Die Imperfektion v_0 ist für die hier behandelten Bauteile wesentlich. Für die Bemessung wird vorgeschlagen, die Annahmen, die in der Normung (DIN 1052:2004-08 bzw. EN 1995:2005-12) getroffen werden, nämlich

$$v_0 = \frac{\ell}{400} \quad \text{für den beidseitig unverschieblich gelagerten Stab} \quad (7.1)$$

und

$$v_0 = \frac{\ell}{200} \quad \text{für den einseitig unverschieblich gelagerten Stab,} \quad (7.2)$$

beizubehalten. Dabei muss für ℓ die tatsächliche Länge des Bauteils eingesetzt werden, um mit den in den folgenden Kapiteln beschriebenen Bemessungsvorschlägen sinnvolle Ergebnissen zu erzielen.

7.3 Bemessung von druckbeanspruchten Bauteilen

Für die Bemessung von druckbeanspruchten Bauteilen kann näherungsweise der Nachweis geführt werden, dass die Traglast bei Erreichen der Zugfestigkeit nicht überschritten wird. Ein Nachweis der Schubspannungen braucht nicht geführt zu werden.

Das durch die Imperfektion v_0 entstehende zusätzliche Moment um die schwache Achse wird durch

$$M_z = N_x \cdot v_0 \cdot \frac{1}{1 - \alpha_N} \quad (7.3)$$

mit

$$\alpha_N = \frac{N_x}{N_{crit}} \quad (7.4)$$

und

$$N_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{\ell_{c,ef}^2} \quad (7.5)$$

ermittelt und zusammen mit der Normalkraft N_x in die Bemessungsgleichung

$$\left(\frac{N_x}{A \cdot f_{c,0,d}} \right)^2 + \frac{M_z}{W_z \cdot f_{m,d}} \leq 1 \quad (7.6)$$

eingesetzt. Zur Ermittlung der Knick-Ersatzstablänge $\ell_{c,ef}$ kann die im Anhang E der DIN 1052:2004-08 angegebene Tabelle E.1 verwendet werden.

7.4 Bemessung von biegebeanspruchten Bauteilen

Für die Bemessung von biegebeanspruchten Bauteilen sollte der Nachweis geführt werden, dass die Traglast bei Erreichen der Zugfestigkeit und die Traglast bei Erreichen der Schubfestigkeit nicht überschritten werden.

7.4.1 Nachweis der Längsspannungen

Das durch die Imperfektion v_0 entstehende zusätzliche Moment um die schwache Achse wird durch

$$M_z = N_{crit} \cdot v_0 \cdot \frac{\alpha_M^2}{1 - \alpha_M^2} \quad (7.7)$$

mit

$$N_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{\ell_{c,ef}} \quad (7.8)$$

sowie mit

$$\alpha_M = \frac{M_y}{M_{crit}} \quad (7.9)$$

und

$$M_{crit} = \frac{\pi}{\ell_{m,ef}} \cdot \sqrt{G \cdot I_x \cdot E \cdot I_z} \quad (7.10)$$

ermittelt und zusammen mit dem Hauptmoment M_y in die Bemessungsgleichung

$$1 \geq \max \left\{ \begin{aligned} &k_{red} \cdot \frac{M_y}{W_y \cdot f_{m,d}} + \frac{M_z}{W_z \cdot f_{m,d}} \\ &\frac{M_y}{W_y \cdot f_{m,d}} + k_{red} \cdot \frac{M_z}{W_z \cdot f_{m,d}} \end{aligned} \right. \quad (7.11)$$

eingesetzt. Zur Ermittlung der Knick-Ersatzstablänge $\ell_{c,ef}$ und der Kipp-Ersatzstablänge $\ell_{m,ef}$ können die im Anhang E der DIN 1052:2004-08 angegebenen Tabellen E.1 und E.2 verwendet werden.

7.4.2 Nachweis der Schubspannungen

Das durch die Imperfektion v_0 erzeugte Torsionsmoment wird durch

$$M_x = \frac{\pi}{\ell_{m,ef}} \cdot M_y \cdot v_0 \cdot \frac{1}{1 - \alpha_M^2} \quad (7.12)$$

mit α_M nach Gl. (7.9) ermittelt. Wird der Stab durch eine äußere Querlast P_d beansprucht, ist das Torsionsmoment durch

$$M_x = P_d \cdot (v_0 + v_{el}) \quad (7.13)$$

mit

$$v_{el} + v_0 = v_0 \cdot \frac{1}{1 - \alpha_M^2} \quad (7.14)$$

zu ermitteln.

Das Torsionsmoment M_x wird zusammen mit äußeren Last P_d in die Bemessungsgleichung

$$\frac{M_x}{W_x \cdot f_{v,d}} + \left(\frac{1,5 \cdot P_d}{A \cdot f_{v,d}} \right)^2 \leq 1 \quad (7.15)$$

eingesetzt werden. Zur Ermittlung der Kipp-Ersatzstablänge $\ell_{m,ef}$ kann die im Anhang E der DIN 1052:2004-08 angegebene Tabelle E.2 verwendet werden.

7.5 Bemessung von druck- und biegebeanspruchten Bauteilen

Für die Bemessung von druck- und biegebeanspruchten Bauteilen sollten die Nachweise für das Erreichen der Zug- und Schubfestigkeit geführt werden.

7.5.1 Nachweis der Längsspannungen

Das durch die Imperfektion v_0 entstehende zusätzliche Moment um die schwache Achse wird durch

$$M_z = N_{crit} \cdot v_0 \cdot \frac{\alpha_N + \alpha_M^2}{1 - \alpha_N - \alpha_M^2} \quad (7.16)$$

mit

$$\alpha_N = \frac{N_x}{N_{crit}} \quad (7.17)$$

und

$$N_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{\ell_{c,ef}} \quad (7.18)$$

sowie mit

$$\alpha_M = \frac{M_y}{M_{crit}} \quad (7.19)$$

und

$$M_{crit} = \frac{\pi}{\ell_{m,ef}} \cdot \sqrt{G \cdot I_x \cdot E \cdot I_z} \quad (7.20)$$

ermittelt und zusammen mit dem Hauptmoment M_y in die Bemessungsgleichung

$$1 \geq \max \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{N_x}{A \cdot f_{c,0,d}} \right)^2 + k_{red} \cdot \frac{M_y}{W_y \cdot f_{m,d}} + \frac{M_z}{W_z \cdot f_{m,d}} \\ &\left(\frac{N_x}{A \cdot f_{c,0,d}} \right)^2 + \frac{M_y}{W_y \cdot f_{m,d}} + k_{red} \cdot \frac{M_z}{W_z \cdot f_{m,d}} \end{aligned} \right. \quad (7.21)$$

eingesetzt. Zur Ermittlung der Knick-Ersatzstablänge $\ell_{c,ef}$ und der Kipp-Ersatzstablänge $\ell_{m,ef}$ können die im Anhang E der DIN 1052:2004-08 angegebenen Tabellen E.1 und E.2 verwendet werden.

7.5.2 Nachweis der Schubspannungen

Das durch das Biegedrillknicken erzeugte Torsionsmoment wird durch

$$M_x = \frac{\pi}{\ell_{m,ef}} \cdot M_y \cdot v_0 \cdot \frac{1}{1 - \alpha_N - \alpha_M^2} \quad (7.22)$$

mit α_M nach Gl. (7.19) ermittelt. Wird der Stab durch eine äußere Querlast P_d beansprucht, ist das Torsionsmoment durch

$$M_x = P_d \cdot (v_0 + v_{el}) \quad (7.23)$$

mit

$$v_{el} + v_0 = v_0 \cdot \frac{1}{1 - \alpha_N - \alpha_M^2} \quad (7.24)$$

zu ermitteln.

Das Torsionsmoment M_x wird zusammen mit der äußeren Last P_d in die Bemessungsgleichung

$$\frac{M_x}{W_x \cdot f_{v,d}} + \left(\frac{1,5 \cdot P_d}{A \cdot f_{v,d}} \right)^2 \leq 1 \quad (7.25)$$

eingesetzt. Zur Ermittlung der Knick-Ersatzstablänge $\ell_{c,ef}$ und der Kipp-Ersatzstablänge $\ell_{m,ef}$ können die im Anhang E der DIN 1052:2004-08 angegebenen Tabellen E.1 und E.2 verwendet werden.

7.6 Beanspruchung durch Streckenlasten

Der in der Praxis häufig vorkommende Fall, dass senkrecht zur Stabachse wirkende Streckenlasten den Biegestab beanspruchen, ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. In diesem Kapitel wird dennoch ein Vorschlag gemacht, wie die Bemessung solcher Stäbe durchgeführt werden kann. Dieser Vorschlag beruht auf einer anschaulichen Übertragung der Ergebnisse, die bei der Untersuchung des einseitig eingespannten Stabs mit Einzellasten am freien Ende erzielt wurden. Dieser Vorschlag ist in einer Folgearbeit zu verifizieren.

7.6.1 Nachweis der Längsspannungen

Der Nachweis der Längsspannungen für einen Stab mit Beanspruchung durch senkrecht zur Stabachse wirkende Streckenlasten kann genauso geführt werden, wie in Kap. 7.4.1 bzw. Kap. 7.5.1 beschrieben. Für M_y muss dabei das maximal auftretende Moment eingesetzt werden. Die Ersatzstablängen $\ell_{c,ef}$ und $\ell_{m,ef}$ können ebenfalls den im Anhang E der DIN 1052:2004-08 angegebenen Tabellen E.1 und E.2 entnommen werden.

7.6.2 Nachweis der Schubspannungen

Beim Nachweis der Schubspannungen für einen Stab mit Beanspruchung durch senkrecht zur Stabachse wirkende Streckenlasten ist zunächst die Resultierende der Streckenlast R_d zu berechnen. Außerdem ist für die Berechnung des Torsionsmoments der Angriffspunkt der Resultierenden der Streckenlast am verformten Modell zu ermitteln. Der entstehende Hebelarm ist ein kleinerer Wert als $(v_0 + v_{el})$, der die größte Verschiebung in Richtung der schwachen Achse darstellt. Wird der volle Wert von $(v_0 + v_{el})$ angenommen, so liegt die Bemessung grundsätzlich auf der sicheren Seite.

Für den Fall, dass eine konstante Streckenlast über die gesamte Länge des beidseitig gabelgelagerten Biegestabs wirkt, kann der Hebelarm, der für die Resultierende der Streckenlast anzunehmen ist, wie sich leicht zeigen lässt, durch $[2/\pi \cdot (v_0 + v_{el})]$ für eine sinusförmige Verschiebung bzw. durch $[2/3 \cdot (v_0 + v_{el})]$ für eine parabelförmige Verschiebung berechnet werden. Das Torsionsmoment kann dann durch

$$M_x = 2/\pi \cdot R_d \cdot (v_0 + v_{el}) \approx 2/3 \cdot R_d \cdot (v_0 + v_{el}) \quad (7.26)$$

mit $(v_0 + v_{el})$ nach Gl. (7.14) bzw. nach Gl. (7.24) jeweils mit $M_y = q \cdot \ell^2/8$ bestimmt und zusammen mit $R_d/2$ anstatt von P_d in Gl. (7.25) zur Bemessung eingesetzt werden.

7.7 Übersicht

| Versagensform | Knicken | Kippen |
|---|--|--|
| Längsspannungsnachweis | | |
| linear | $1 \geq \frac{N_d}{k_c \cdot A \cdot f_{c,0,d}}$ | $1 \geq \frac{M_{y,d}}{k_m \cdot W_y \cdot f_{m,d}}$ |
| nichtlinear | $1 \geq \left(\frac{N_d}{A \cdot f_{c,0,d}} \right)^2 +$ $+ \frac{N_d \cdot v_0}{(1 - \alpha_N) \cdot W_z \cdot f_{m,d}}$ | $1 \geq k_{red} \cdot \frac{M_{y,d}}{W_y \cdot f_m} + \frac{N_{crit} \cdot v_0 \cdot \alpha_M^2}{W_z \cdot f_m \cdot (1 - \alpha_M^2)}$ $1 \geq \frac{M_{y,d}}{W_y \cdot f_m} + k_{red} \cdot \frac{N_{crit} \cdot v_0 \cdot \alpha_M^2}{W_z \cdot f_m \cdot (1 - \alpha_M^2)}$ |
| Schubspannungsnachweis | | |
| linear | nicht nötig | nicht möglich |
| nichtlinear bei Beanspruchung durch äußere Momente | nicht nötig | $1 \geq \frac{M_{y,d} \cdot \pi \cdot v_0}{W_x \cdot f_{v,d} \cdot \ell_{m,ef} \cdot (1 - \alpha_M^2)}$ |
| nichtlinear bei Beanspruchung durch resultierende Kräfte R_d | nicht nötig | $1 \geq \frac{R_d \cdot r_{Res} \cdot v_0}{W_x \cdot f_{v,d} \cdot (1 - \alpha_M^2)} + \left(\frac{1,5 \cdot R_d}{A \cdot f_{v,d}} \right)^2$ <p>mit $0 \leq r_{RES} \leq 1$ für die Berücksichtigung des tatsächlichen Angriffspunkt der resultierenden Kraft (sichere Seite: $r_{RES} = 1$)</p> |

Tabelle 7.1: Übersicht der Bauteilnachweise für das Biegedrillknicken

| Versagensform | Biegedrillknicken |
|---|---|
| Längsspannungsnachweis | |
| linear | $1 \geq \frac{N_{ErSt,d}}{k_c \cdot A \cdot f_{c,0,d}} + \frac{M_{y,d}}{k_m \cdot W_y \cdot f_{m,d}}$ |
| nichtlinear | $1 \geq \left(\frac{N_d}{A \cdot f_{c,0,d}} \right)^2 + k_{red} \cdot \frac{M_{y,d}}{W_y \cdot f_m} + \frac{N_{crit} \cdot v_0 \cdot (\alpha_N + \alpha_M^2)}{W_z \cdot f_m \cdot (1 - \alpha_N - \alpha_M^2)}$ $1 \geq \left(\frac{N_d}{A \cdot f_{c,0,d}} \right)^2 + \frac{M_{y,d}}{W_y \cdot f_m} + k_{red} \cdot \frac{N_{crit} \cdot v_0 \cdot (\alpha_N + \alpha_M^2)}{W_z \cdot f_m \cdot (1 - \alpha_N - \alpha_M^2)}$ |
| Schubspannungsnachweis | |
| linear | nicht möglich |
| nichtlinear bei Beanspruchung durch äußere Momente | $1 \geq \frac{M_{y,d} \cdot \pi \cdot v_0}{W_x \cdot f_{v,d} \cdot \ell_{m,ef} \cdot (1 - \alpha_N - \alpha_M^2)}$ |
| nichtlinear bei Beanspruchung durch resultierende Kräfte R_d | $1 \geq \frac{R_d \cdot r_{Res} \cdot v_0}{W_x \cdot f_{v,d} \cdot (1 - \alpha_N - \alpha_M^2)} + \left(\frac{1,5 \cdot R_d}{A \cdot f_{v,d}} \right)^2$ <p>mit $0 \leq r_{RES} \leq 1$ für die Berücksichtigung des tatsächlichen Angriffspunkt der resultierenden Kraft (sichere Seite: $r_{RES} = 1$)</p> |

Tabelle 7.2: Übersicht der Bauteilnachweise für das Biegedrillknicken

| | | N-M-Interaktion | M_y - M_z -Interaktion |
|---|--|-----------------|----------------------------|
| Analytisch ermittelte Interaktionsdiagramme | linear elastisch | | |
| | linear elastisch mit probabilistisch angepasster Biegefestigkeit | | |
| | elastisch plastisch mit probabilistisch angepasster Biegefestigkeit | | |
| | elastisch plastisch mit vollständiger Berücksichtigung des Volumeneffekts | | |
| Näherung nach DIN 1052:2004-08 | | | |

Tabelle 7.3: Die Tragfähigkeit eines Querschnitts aus Holz der Festigkeitsklasse C24

8 Zusammenfassung

Um die in der Einleitung formulierten Ziele zu erreichen, werden zunächst in Kap. 2 die theoretischen Grundlagen des druck- und biegebeanspruchten Stabs dargestellt. Es wird ein lineares Materialmodell zur Ermittlung der geometrisch nichtlinearen Schnittgrößen des differentiellen Elements verwendet. Darauf aufbauend werden die Stabilitäts- und Spannungsprobleme ausgewählter Biegestäbe hergeleitet und gelöst. Für den im Bauwesen als Ersatzstab für das Kippen verwendeten beidseitig gabelgelagerten, durch äußere Momente beanspruchten Biegestab kann eine mathematisch exakte Lösung zunächst für das Kippen und dann auch für das Biegedrillknicken, welches das Knicken und Kippen als Sonderfall beinhaltet, gefunden werden. Daneben wird die Lösung des Stabilitätsproblems des einseitig eingespannten, durch am freien Ende angreifende Einzellast beanspruchten Stabs für das Kippen mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes auf das Biegedrillknicken desselben Stabs erweitert. Dies erfolgt, um eine Grundlage dafür zu haben, die Ersatzstablängen, die beim Ersatzstabverfahren verwendet werden, vom Knicken und Kippen auf das Biegedrillknicken zu erweitern.

In Kap. 3 werden alle für das Knicken, Kippen und Biegedrillknicken relevanten Eigenschaften des Baustoffs Holz beschrieben. Es werden vereinfachte mechanische Materialmodelle für das Verhalten von Bauholz unter Druck-, Zug- und Schubbeanspruchungen dargestellt und begründet. Außerdem werden verschiedene statistische Modelle zur Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit erläutert. Das Verhalten von Holz unter Langzeitbeanspruchung wird bei dieser Darstellung ausgeklammert, da es hier darum geht, ein geschlossenes Konzept für die Bemessung bei Kurzzeitbeanspruchung zu erarbeiten.

Auf der Grundlage der mechanischen und statistischen Modelle für Bauholz wird in Kap. 4 ein Modell zur Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit für die kombinierte Beanspruchung aus Längskraft und Biegung hergeleitet und ausgewertet. Dabei wird zum einen die elastisch-plastische Arbeitslinie von Bauholz unter Druckbeanspruchung berücksichtigt. Zum anderen wird die sich aufgrund des spröden Zugversagens ändernde Versagenswahrscheinlichkeit bei sich ändernder Form der Zugbeanspruchung sowie bei sich veränderndem Zugbeanspruchungsbereich einbezogen. Dieser Effekt ist auch als Volumeneffekt bekannt. Mit den Ergebnissen dieses Modells werden die Gleichungen zur Bemessung der Querschnittstragfähigkeit, die in der Normung verwendet werden, verglichen und beurteilt.

Für die Analyse der Bauteiltragfähigkeit knick-, kipp und biegedrillknick-gefährdeter Stäbe in Kap. 5 wird ein FE-Modell entwickelt, das die materielle Nichtlinearität des Plastizierens im Druckbereich berücksichtigt. Die Ergebnisse der Simulationen des Tragverhaltens werden mit den Traglasten, die mit Hilfe des k_c - und k_m -Verfahrens bzw. des kombinierten k_c - k_m -Verfahrens ermittelt werden können, und jenen, die mit Hilfe der in Kap. 2 hergeleiteten analytischen Berechnungsgleichungen in Kombination mit den in

Kap. 4 untersuchten Bemessungsgleichungen berechnet werden können, verglichen. Diese Untersuchung wird für die Ersatzstab-Modelle ebenso durchgeführt, wie für den oben bereits genannten einseitig eingespannten Stab mit Einzellasten am freien Ende (Kap. 6).

In Kap. 7 kann dann auf der Grundlage der Ergebnisse der Untersuchungen aus Kap. 5 ein Bemessungskonzept für knick-, kipp- und biegedrillknick-gefährdete Bauteile angegeben werden. Mit Hilfe des einseitig eingespannten Stabs mit Einzellasten am freien Ende wird nachgewiesen, dass das Bemessungskonzept grundsätzlich auch als Ersatzstabverfahren genutzt werden kann. Eine Untersuchung für den allgemeinen Fall steht jedoch noch aus.

Der Vergleich der Ergebnisse der verschiedenen Methoden zeigt, dass das neu entwickelte Bemessungskonzept einerseits zu Ergebnissen führt, die wirtschaftlich und sicher sind. Andererseits beruht es im Gegensatz zu den k_c - und k_m -Verfahren (bzw. ihrer Kombination) auf einheitlichen Grundlagen für das Knicken, Kippen und Biegedrillknicken, ist gut nachvollziehbar und es können Eingangsparameter, wie Größe und Art der Imperfektionen jederzeit den Erfordernissen angepasst werden. Darüber hinaus ist eine Bemessung nach dem vorgeschlagenen Konzept nicht aufwendiger oder komplizierter zu handhaben als die bekannten vereinfachten Bemessungsverfahren.

Literatur

- [1] *DIN EN 1194, Brettschichtholz (Festigkeitsklassen und Bestimmung charakteristischer Werte)*. Beuth Verlag GmbH, Berlin, 1999-05
- [2] *DIN EN 384, Bauholz für tragende Zwecke (Bestimmung charakteristischer Festigkeits-, Steifigkeits- und Rohdichtewerte)*. Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2001-02
- [3] *DIN 68364, Kennwerte von Holzarten (Rohdichte, Elastizitätsmodul und Festigkeiten)*. Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2003-05
- [4] *DIN EN 338, Bauholz für tragende Zwecke (Festigkeitsklassen)*. Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2003-09
- [5] *DIN 1052, Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holzbauwerken - Allgemeine Bemessungsregeln und Bemessungsregeln für den Hochbau*. Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2004-08
- [6] *DIN EN 1995-1-1, Eurocode 5: Bemessung und Konstruktion von Holzbauten*. Beuth Verlag GmbH, 2005-12
- [7] BARBRÉ, R.: Der Einfluss elastischer Einspannungen und Querstützungen auf die Kippstabilität. In: *Bauingenieur* (1952), S. 268
- [8] BECKER, Peter: *Modellierung des zeit- und feuchteabhängigen Materialverhaltens zur Untersuchung des Langzeittragverhaltens von Druckstäben aus Holz*, Bauhaus-Universität Weimar Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Diss., 2002
- [9] BENNING, Heinz H.: *Beitrag zur Traglastberechnung stabilitätsgefährdeter Brettschichtholzträger*, Lehrstuhl für Baukonstruktionen, Ingenieurholzbau und Bauphysik der Ruhr-Universität Bochum, Diss., 1997
- [10] BLASS, Hans-Joachim: *Tragfähigkeit von Druckstäben aus Brettschichtholz unter Berücksichtigung streuender Einflussgrößen*, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Fredericana zu Karlsruhe, Diss., 1987
- [11] Kap. B6 In: BLASS, Hans-Joachim: *Druckstäbe*. Informationsdienst Holz, 1995, S. B6/1 – B6/8
- [12] BRÜNINGHOFF, H. ; KLAPP, H.: Shear strength of glued laminated timber. In: *International council for research and innovation in building and construction Working Commission W18 - Timber Structures*, 2005
- [13] BRÜNINGHOFF, Heinz ; KLAPP, Holger: Stabilitätsnachweis im Holzbau - Biegedrillknicken mit Normalkraft. In: *Bauen mit Holz* (2005)

- [14] BUCHANAN, Andrew H.: *Strength model and design methods for bending and axial load interaction in timber members*, University of Canterbury, New Zealand and University of California, Berkley, Diss., 1984
- [15] BURGER, N. ; GLOS, P.: Verhältnis von Zug- zu Biegefestigkeit bei Vollholz. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* (1997)
- [16] BURGER, Norbert: *Einfluss der Holzabmessungen auf die Festigkeit von Schnittholz unter Zugbeanspruchung in Faserrichtung*, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der TU München, Diss., 1998
- [17] CARL, Jürgen: *Näherungslösung des nichtlinearen Biege-Torsionsproblems für dünnwandige Stäbe mit offenem Profil*, Fakultät für Bauingenieurwesen der Technischen Universität Berlin, Diss., 1969
- [18] CHEN, Wai-Fah ; ATSUTA, Toshio: Column curvature method for analysis of beam columns. In: *Journal of the institution of structural engineers* 50 (1972), S. 233
- [19] CHEN, Wai-Fah ; ATSUTA, Toshio: Strength of eccentric loaded walls. In: *International journal of solids and structures* 9 (1973), S. 1283–1300
- [20] CHEN, Wai-Fah ; ATSUTA, Toshio: *Theory of Beam-Columns, Vol 1: In-plane behavior and design*. McGraw-Hill Inc., 1976
- [21] CHEN, Wai-Fah ; SANTATHADAPORN, Sakda: Curvature and the solution of eccentrically loaded columns. In: *Journal of the engineering mechanics division, ASCE* 95 (1969), S. 21
- [22] CHWALLA, Ernst: Die Kipp-Stabilität gerader Träger mit doppel-symmetrischem I-Querschnitt / Forschungshefte aus dem Gebiet des Stahlbaus des deutschen Stahlbau-Verbands. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1939. – Forschungsbericht
- [23] COLLING, Francois: Einfluss des Volumens und der Spannungsverteilung auf die Festigkeit eines Rechteckträgers. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 44 (1986), S. 121–125, 179–183
- [24] COLLING, Francois: *Tragfähigkeit von Biegeträgern aus Brettschichtholz in Abhängigkeit von den festigkeitsrelevanten Einflussgrößen*, Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine der Universität Fridericana in Karsruhe, Diss., 1990
- [25] EBERHARDSTEINER, Josef: *Mechanisches Verhalten von Fichtenholz*. Springer-Verlag, Wien, New York, 2002
- [26] EHLBECK, Jürgen ; BLASS, Hans-Joachim: Zuverlässigkeit von Holzdruckstäben / Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine, Abt. Ingenieurholzbau, Universität Fridericana Karlsruhe. 1984. – Forschungsbericht

- [27] EHLBECK, Jürgen ; BLASS, Hans-Joachim: Zuverlässigkeit von Holzdruckstäben / Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine, Abt. Ingenieurholzbau, Universität Fridericana Karlsruhe. 1987. – Forschungsbericht
- [28] EWALD, G. ; LISCHKE, N.: Zur Torsion im Ingenieurholzbau. In: *Bauen mit Holz* (1983), S. 466–469
- [29] GLOS, P. ; BURGER, N.: Einfluss der Holzabmessungen auf die Zugfestigkeit von Bauschnittholz / Institut für Holzforschung der Universität München. 1995. – Forschungsbericht
- [30] GLOS, Peter: *Zur Bestimmung des Festigkeitsverhaltens von Brettschichtholz bei Druckbeanspruchung aus Werkstoff- und Einwirkungskenngrößen*, Fachbereich für Bauingenieur- und Vermessungswesen der TU München, Diss., 1978
- [31] GLOS, Peter: Zur Modellierung des Festigkeitsverhaltens von Bauholz bei Druck-, Zug- und Biegebeanspruchung / Laboratorium für den konstruktiven Ingenieurbau (LKI), TU München. 1981. – Forschungsbericht
- [32] GRESSEL, Peter: Erfassung, systematische Auswertung und Ergänzung bisheriger Untersuchungen oder das rheologische Verhalten von Holz und Holzwerkstoffen : ein Beitrag zur Verbesserung des Formänderungsnachweises nach DIN 1052 "Holzbauwerke"; / Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine Abt. Ingenieurholzbau, Universität Fridericana Karlsruhe. 1983. – Forschungsbericht
- [33] HALÁSZ, Robert v. (Hrsg.) ; SCHEER, Claus (Hrsg.): *Holzbau-Taschenbuch*. Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin, 1989
- [34] HEMMER, Klaus: *Versagensarten des Holzes der Weißtanne (Abies alba) unter mehrachsiger Beanspruchung*, Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine der Universität Fridericana in Karlsruhe, Diss., 1985
- [35] HOFMANN, Thomas J.: *Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie*, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Diss., 1992
- [36] HOOLEY, R.F. ; MADSEN, Borg: Lateral stability of glued laminated beams. In: *Journal of the Structural Division* (1964), S. 201 – 218
- [37] HUG: *Der ausmittig gedrückte und querbelastete, ein- und mehrteilige Holzdruckstab*, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität (TH) Karlsruhe, Diss., 1971
- [38] KERSKEN-BRADLEY, Marita: Beanspruchbarkeit von Bauteilquerschnitten bei streuenden Kenngrößen des Kraftverformungsverhaltens innerhalb des Querschnitts / Laboratorium für den konstruktiven Ingenieurbau (LKI), TU München. 1981. – Forschungsbericht
- [39] KESSEL, Martin H.: *Baustoff Holz*. 2007. – Vorlesungsskript, TU Braunschweig

- [40] KESSEL, Martin H. ; HALLER, P. ; BERTOLINO, F.: Experimentelle Untersuchungen an gedungenen Stützen aus Schweizer Fichtenholz. In: *Bauingenieur* 67 (1992), S. 277–281
- [41] KESSEL, Martin H. ; SCHÖNHOF, Theo ; HÖRSTING, Philippe: Zum Nachweis von druckbeanspruchten Bauteilen nach DIN 1052:2004-08. In: *Bauen mit Holz* 12/1 (2005/06), S. 88 – 96, 41 – 44
- [42] KOLLBRUNNER, Curt F. ; MEISTER, Martin: *Knicken, Biegedrillknicken, Kippen*. Springer-Verlag, 1961
- [43] KOLLMANN, Franz: *Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, München, 1951
- [44] KÜRSCHNER, Karl: *Chemie des Holzes*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1966
- [45] KUFNER, Max: Elastizitätsmodul und Zugfestigkeit von Holz verschiedener Rohdichte in Abhängigkeit vom Feuchtegehalt. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 36 (1978), S. 435–439
- [46] LARSEN, Hans J. ; THEILGAARD, Esko: Laterally loaded timber columns. In: *Journal of the Structural Division* (1979), S. 1347–1363
- [47] MÖHLER, Karl: *Tragkraft und Querkraft von ein- und mehrteiligen Holzdruckstäben nach Versuch und Rechnung*, Technische Hochschule Karlsruhe, Versuchsanstalt für Holz, Stein und Eisen, Diss., 1942
- [48] MÖHLER, Karl: Informationen zur Berechnung von Holzkonstruktionen. In: *Holzbau-Statik-Aktuell* 7 (1983), S. 13 – 16
- [49] MÖHLER, Karl ; HEMMER, Klaus: Rechnerischer Nachweis von Spannungen und Verformungen aus Torsion bei einteiligen Vollholz- und Brettschichtholzbauteilen. In: *HOLZBAU-STATIK-AKTUELL* 2 (1977)
- [50] MÖHLER, Karl ; HEMMER, Klaus: Verformungs- und Festigkeitsverhalten von Nadelvoll- und Brettschichtholz bei Torsionsbeanspruchung. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 35 (1977), S. 473–478
- [51] MICHELL, A.G.M.: Elastic stability of long beams under transverse forces. In: *The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science, 5th series* 48 (1899), S. 298–309
- [52] NEUHAUS, F.-Helmuth: *Elastizitätszahlen von Fichtenholz in Abhängigkeit von der Holzfeuchtigkeit*, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 1981
- [53] NIEMZ, Peter: *Physik des Holzes und der Holzwerkstoffe*. DRW-Verlag Weinbrenner GmbH&Co., 1993

- [54] PAPULA, Lothar: *Mathematische Formelsammlung*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1986. – 74 S
- [55] PETERSEN, Christian: *Statik und Stabilität der Baukonstruktion*. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1982
- [56] PFLÜGER, Alf: *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer-Verlag, 1964
- [57] POULSEN, Johannes S.: *Compression in clear wood*, Department of structural engineering and materials, Technical University of Denmark, Diss., 1998
- [58] PRANDTL, Ludwig: *Kipp-Erscheinungen*, Philosophische Fakultät, Sektion II der Ludwig-Maximilians-Universität zu München, Diss., 1899
- [59] RAUTENSTRAUCH, Karl: *Untersuchungen zur Beurteilung des Kriechverhaltens von Holzbiegeträgern*, Fachbereich für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Hannover, Diss., 1989
- [60] ROIK, Karlheinz ; CARL, Jürgen ; LINDNER, Joachim: *Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe*. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf, 1972
- [61] SCHARR, G.: Beitrag zur Torsionselastizität von Hölzern in Abhängigkeit von der Holztemperatur und der Belastungszeit. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 44 (1986), S. 57–60
- [62] SCHULTE, Claudia: *Entwicklung eines Rechenmodells zur Bestimmung der Tragfähigkeit von stabilitätsgefährdeten Brettschichtholzträgern unter Berücksichtigung streuender Einflussgrößen*, Lehrstuhl für Baukonstruktionen, Ingenieurholzbau und Bauphysik der Ruhr-Universität Bochum, Diss., 1998
- [63] STEIGER, René: Mechanische Eigenschaften von schweizer Fichten-Bauholz bei Biege-, Zug, Druck- und kombinierter M/N Beanspruchung / Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich. 1996. – Forschungsbericht
- [64] TEICHMANN, Gabriele: Einfluss von Kriechen und Schwinden auf die Stabilität hoher Biegeträger. In: *Forschungskolloquium Holzbau Forschung + Praxis*. Institut für Konstruktion und Entwurf, Universität Stuttgart, 2006
- [65] TETMAJER, L.: Methoden und Resultate der Prüfung der schweizer Bauhölzer / Materialprüfanstalt am schweizer Polytechnikum in Zürich. 1896. – Forschungsbericht
- [66] TIMOSHENKO, Stephen P.: *Collected Papers*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953
- [67] TIMOSHENKO, Stephen P. ; GERE, James M.: *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill book company, Inc., 1961

-
- [68] WAGENFÜHR, Rudi: *Anatomie des Holzes*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1966
- [69] WEIBULL, Waloddi: A statistical theory of the strength of material / Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag Stockholm. 1939. – Forschungsbericht
- [70] WLASSOW, W.S.: *Dünnwandige elastische Stäbe*. VEB Verlag für Bauwesen Berlin, 1964
- [71] ZURBORG, Jens: *Zur Stabilisierung knick- oder kippgefährdeter Holzbauteile durch diskrete Abstützungen gegen nachgiebige Sekundärtragwerke*, Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Hannover, Diss., 2002

A Anhang

A.1 Herleitung des Verdrehungs- und des Krümmungvektors nach Roik [60]

Verformungen, Verdrehungen und Krümmungen können im lokalen oder im globalen Koordinatensystem beschrieben werden. Das globale Koordinatensystem hat den Vorteil, dass es für alle Verformungszustände gleich bleibt. Daher wird hier eine Beschreibung im globalen Koordinatensystem gewählt. Die Beschreibung kann allerdings durch die Wahl von globalen und lokalen Einheitsvektoren konkretisiert werden. Mit den globalen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

können mit Hilfe der Transformationsmatrix Gl. (2.6) durch

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

die lokalen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\xi = \begin{pmatrix} 1 - \frac{v'^2}{2} - \frac{w'^2}{2} \\ v' - w' \vartheta \\ w' - v' \vartheta \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix} -v' \\ 1 - \frac{\vartheta^2}{2} - \frac{w'^2}{2} \\ \vartheta - v' w' \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix} -w' \\ -\vartheta \\ 1 - \frac{v'^2}{2} - \frac{\vartheta^2}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

ermittelt werden. Der Verschiebungsvektor eines Punktes wird im allgemeinen durch

$$\vec{v} = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_y + w \cdot \vec{e}_z \quad (\text{A.8})$$

beschrieben. Der Verdrehungsvektor des Punktes eines Stabes

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2 \quad (\text{A.9})$$

setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, der globalen Verdrehung aus Biegung

$$\vec{\varphi}_1 = -w' \cdot \vec{e}_y + v' \cdot \vec{e}_z \quad (\text{A.10})$$

und der lokalen Verdrehung aus Verdrillung

$$\vec{\varphi}_2 = \vartheta \cdot \vec{e}_\xi = \vartheta \cdot \vec{e}_x + v' \vartheta \cdot \vec{e}_y + w' \vartheta \cdot \vec{e}_z \quad (\text{A.11})$$

der Stabes. Daraus folgt für die gesamte Verdrehung der Verdrehungsvektor

$$\begin{aligned} \vec{\varphi} &= \vartheta \cdot \vec{e}_x + (-w' + v' \vartheta) \cdot \vec{e}_y + (v' + w' \vartheta) \cdot \vec{e}_z = \\ &= \vartheta \cdot \vec{e}_\xi + (-w' + v' \vartheta) \cdot \vec{e}_\eta + (v' + w' \vartheta) \cdot \vec{e}_\zeta, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

dessen Ableitung der Krümmungsvektor

$$\begin{aligned} \vec{\kappa} = \frac{d\vec{\varphi}}{dx} &= \vartheta' \cdot \vec{e}_x + (-w' + v'' \vartheta + v' \vartheta') \cdot \vec{e}_y + (v' + w'' \vartheta + w' \vartheta') \cdot \vec{e}_z \\ &= (\vartheta' - v' w'' - v'' w') \cdot \vec{e}_\xi + (-w' + 2v'' \vartheta) \cdot \vec{e}_\eta + (v' + 2w'' \vartheta) \cdot \vec{e}_\zeta \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

ist. So können die Verdrehungsgrößen

$$\varphi_x = \varphi_\xi = \vartheta \quad (\text{A.14})$$

$$\varphi_y = \varphi_\eta = -w' + v' \vartheta \quad (\text{A.15})$$

$$\varphi_z = \varphi_\zeta = v' + w' \vartheta, \quad (\text{A.16})$$

sowie die Krümmungsgrößen

$$\kappa_x = \vartheta' \quad (\text{A.17})$$

$$\kappa_y = -w'' + v'' \vartheta + v' \vartheta' \quad (\text{A.18})$$

$$\kappa_z = v'' + w'' \vartheta + w' \vartheta' \quad (\text{A.19})$$

$$\kappa_\xi = \vartheta' - v' w'' - v'' w' \quad (\text{A.20})$$

$$\kappa_\eta = -w'' + 2v'' \vartheta \quad (\text{A.21})$$

$$\kappa_\zeta = v'' + 2w'' \vartheta \quad (\text{A.22})$$

ermittelt werden.

A.2 Untersuchung des Bemessungsvorschlags von Brüninghoff und Klapp

In [13] haben Brüninghoff und Klapp 2005 einen Vorschlag für die Bemessung von biegedrillknick-gefährdeten Stäben unterbreitet. Der vorgeschlagene Nachweis beinhaltet einen kombinierten Beiwert $k_{c,m}$, der einerseits die beiden Beiwerte k_c für das Knicken und k_m für das Kippen zusammenführen, andererseits auch das nichtlineare Materialverhalten von Holz korrekt berücksichtigen soll. Der Nachweis hat die Form

$$\frac{N_{ErSt,d}}{A \cdot f_{c,0,d}} + \frac{M_{ErSt,d}}{k_{c,m} \cdot W_y \cdot f_{m,d}} \leq 1 \quad (\text{A.23})$$

mit

$$k_{c,m} = k_m \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{N_{ErSt,d}}{A \cdot f_{c,0,d}} \right)^n} \quad (\text{A.24})$$

und

$$n = \max \begin{cases} 3,25 - 2,5 \cdot \lambda_{rel,m} \\ 1 \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

sowie den bekannten Beiwerten für das Knicken und das Kippen k_c , k_m und $\lambda_{rel,m}$. Die Traglasten nach diesem Verfahren können nur iterativ ermittelt werden. Die Ergebnisse nach dem Brüninghoff/Klapp'schen Verfahren für eine beispielhafte Geometrie- und Beanspruchungskombination sind in Bild A.3 denen nach analytischer Berechnung gegenübergestellt. In Bild A.1 und Bild A.2 ist der Wert $r_{BDK,BrKl}$, der das Verhältnis der Traglast nach dem Brüninghoff/Klapp'schen Verfahren und der analytisch ermittelten angibt, über den Knick- und Kipp-Schlankheiten für vier verschiedene Geometrie- und Beanspruchungskombinationen dargestellt.

Die Ergebnisse zeigen deutlich, dass auch dieser Vorschlag zur Verbesserung des kombinierten k_c - k_m -Verfahrens für die Bemessung von biegedrillknick-gefährdeten Bauteilen keine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der analytischen Bemessung aufweisen. Das tatsächliche Tragverhalten wird nur in Teilbereichen gut angenähert.

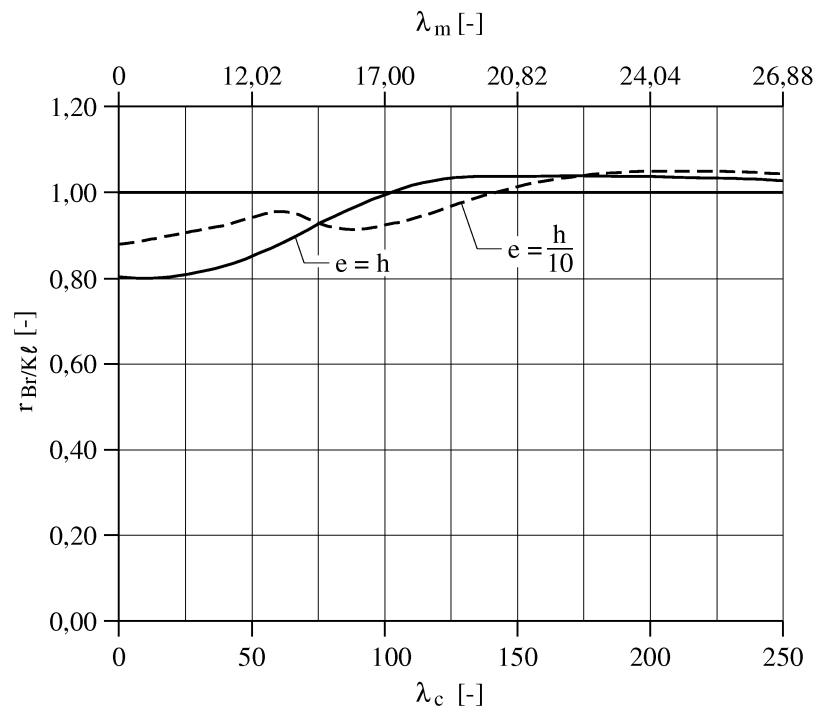


Bild A.1: Verhältniswert $r_{BDK,BrKl}$ von biegedrillknick-gefährdeten Biegestäben mit $h/b = 10$ bei Anwendung des Vorschlags von Brüninghoff und Klapp

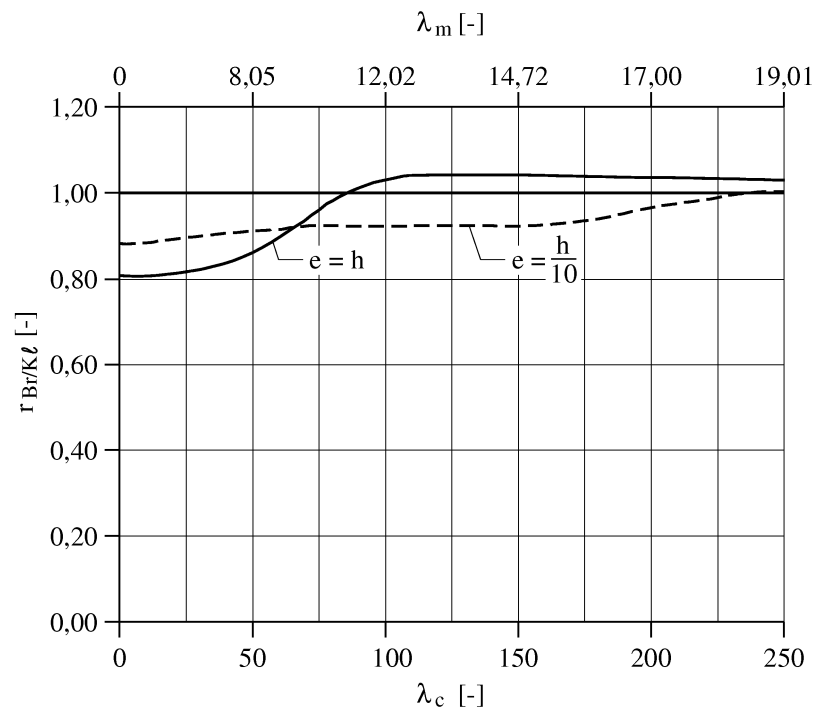


Bild A.2: Verhältniswert $r_{BDK,BrKl}$ von biegedrillknick-gefährdeten Biegestäben mit $h/b = 5$ bei Anwendung des Vorschlags von Brüninghoff und Klapp

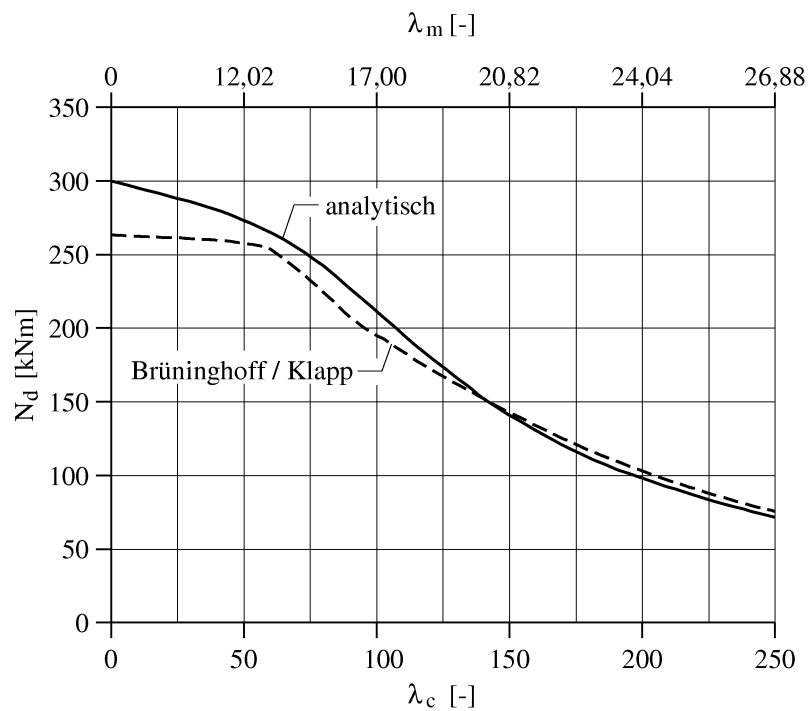


Bild A.3: Traglasten von biegedrillknick-gefährdeten Biegestäben mit $h/b = 10$ und $e = h$ nach Brünighoff und Klapp sowie nach analytischer Berechnung

A.3 Weitere Diagramme

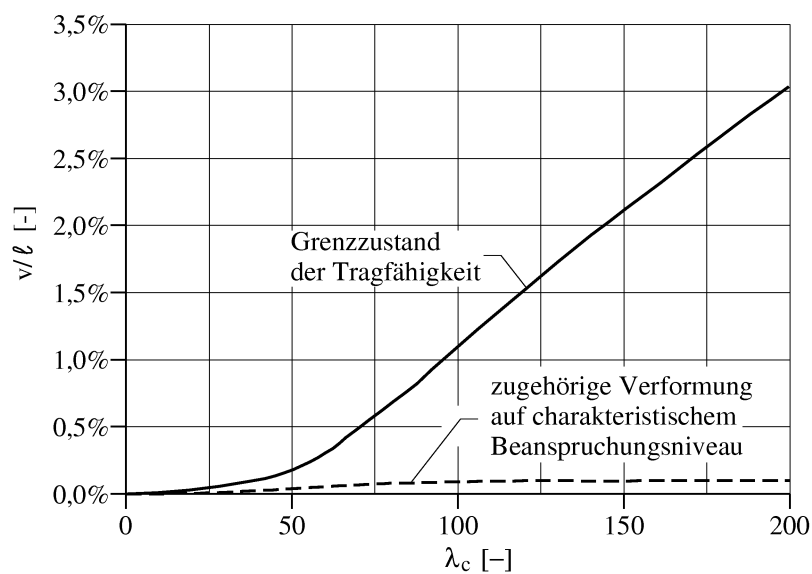


Bild A.4: Verformungen von Druckstäben aus Brettschichtholz (C24) im Grenzzustand der Tragfähigkeit und auf dem zugehörigen charakteristischen Beanspruchungsniveau

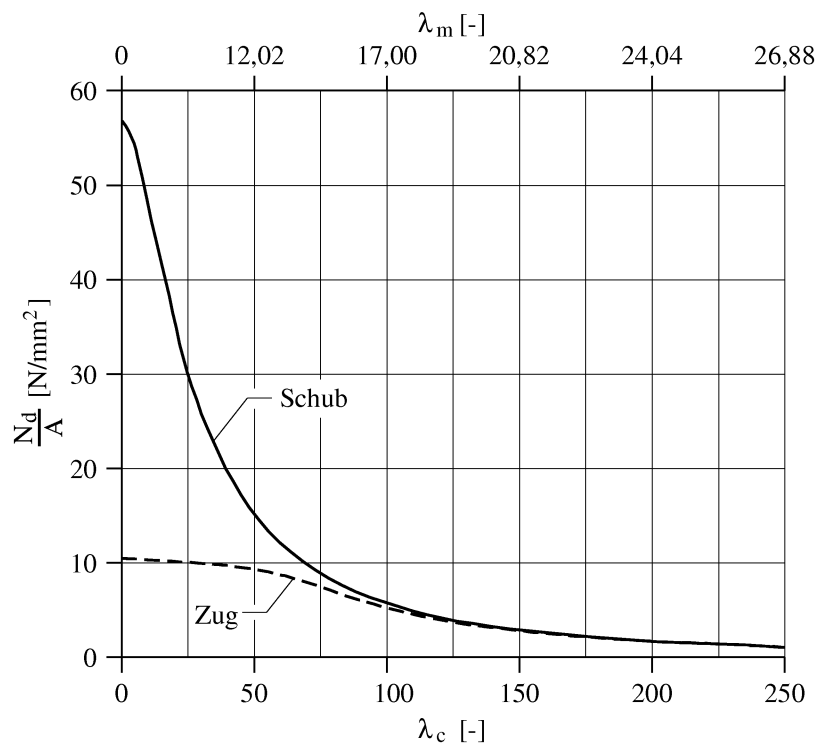


Bild A.5: Auf spannungsebene normierte Traglast von biegedrillknick-gefährdeten Stäben mit $h/b = 10$ und $e = h/5$ bei Zug- und bei Schubversagen

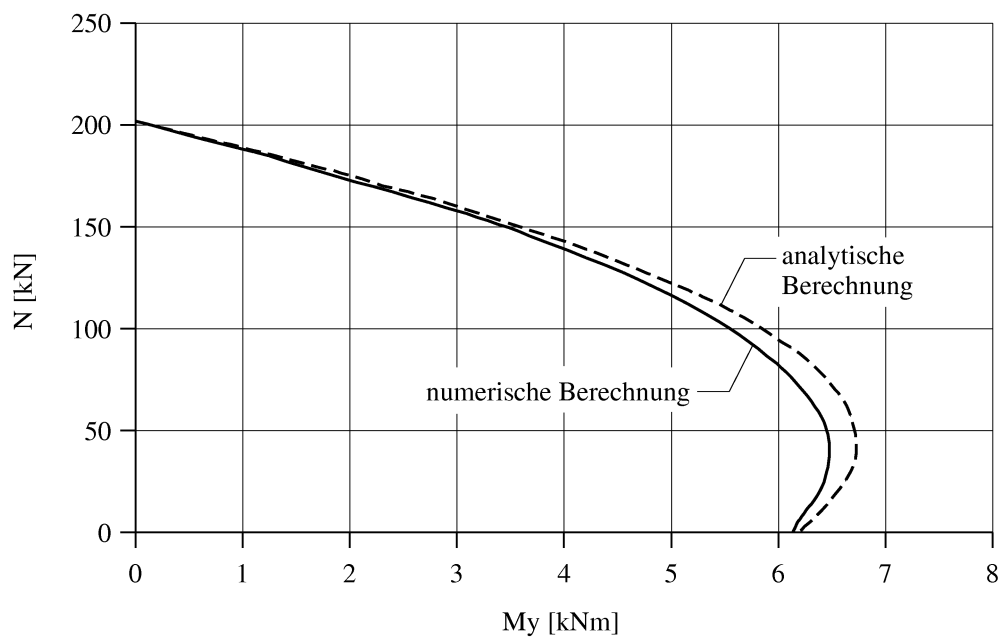


Bild A.6: Charakteristische Tragfähigkeit eines C24 Querschnitts (60/160) nach analytischer und numerischer Berechnung

A.4 Lösungen des Stabilitätsproblems einiger Modelle nach Pflüger [56]

| Nr. | Statisches Modell | Kritische Last | Quelle | $\ell_{m,ef} = \beta_m \cdot \ell$ |
|-----|-------------------|---|-------------|--|
| 1 | | $\alpha) M_{crit} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_z GI_x}$ $\beta) M_{crit} = \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{EI_z GI_x}$ | [67], S.253 | $\alpha) \beta_m = 1,0$ $\beta) \beta_m = 0,5$ |
| 2 | | $\alpha) P_{crit} = \frac{16,94}{\ell^2} \sqrt{EI_z GI_x}$ $\beta) P_{crit} = \frac{26,6}{\ell^2} \sqrt{EI_z GI_x}$ | [67], S.268 | $\alpha) \beta_m = 0,742$ $\beta) \beta_m = 0,472$ |
| 3 | | $P_{crit} = \frac{44,5}{\ell^2} \sqrt{EI_z GI_x}$ | [7] | $\beta_m = 0,565$ |

Tabelle A.1: Kritische Kipplasten nach Pflüger [56] mit zugehörigen Kipp-Ersatzstablängen

| Nr. | Statisches Modell | Kritische Last | Quelle | $\ell_{m,ef} = \beta_m \cdot \ell$ |
|-----|-------------------|--|----------------|--|
| 4 | | $\alpha) q_{crit} = \frac{28,3}{\ell^3} \sqrt{EI_z GI_x}$ $\beta) q_{crit} = \frac{48,8}{\ell^3} \sqrt{EI_z GI_x}$ | [67], S.267 | $\alpha) \beta_m = 0,888$ $\beta) \beta_m = 0,515$ |
| 5 | | $M_{crit} = \frac{\pi}{2\ell} \sqrt{EI_z GI_x}$ | [56] | $\beta_m = 2,0$ |
| 6 | | $\alpha) P_{crit} = \frac{4,013}{\ell^2} \sqrt{EI_z GI_x}$ $\beta) P_{crit} = \frac{5,5}{\ell^2} \sqrt{EI_z GI_x}$ | [67], S.257 | $\alpha) \beta_m = 0,783$ $\beta) \beta_m = 0,571$ |
| 7 | | $q_{crit} = \frac{12,85}{\ell^3} \sqrt{EI_z GI_x}$ | [67], S.261 | $\beta_m = 0,489$ |

Tabelle A.2: Kritische Kipplasten nach Pflüger [56] mit zugehörigen Kipp-Ersatzstablängen